微積分II演習 担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 15 回（'15 年 2 月 6 日：Keyword ··· 期末テスト）

以下の問題を適当に選んで解答せよ．定期試験の配分は 40 点であるが、この試験によって 40 点以上取っても 60 点までは成績として加算される．

問題-1. [(10)]
次の関数は全平面において連続であることを示せ.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+2y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

問題-2. [(5+5+5)]
次の 2 変数関数 $f(x,y) = xy(1-2x-3y)$ について以下の問いに答えよ.

(1) 偏微分が全て 0 となる点を臨界点という． $f(x,y)$ においてそのような点を全て求めよ.

(2) $f(x,y)$ の (x,y) でのヘッセ行列およびヘッシアンを求めよ.

(3) (1) の臨界点のうち、極大、極小となる点はあるか？そのような点を全て求め、極値を計算せよ.

問題-3. [(5+5)]
条件 $x^2 - xy - y^2 + 1 = 0$ の下で、関数 $f(x,y) = x^2 - xy$ を考える.

(1) ラグランジュの未定乗数法を用いてこの条件付き関数の臨界点を全て求めよ.
（ヒント：そのような点は 2 点ある.）

(2) そのような各点において条件式には $y = \varphi(x)$ なる陰関数が存在するか？示せ.

問題-4. [(10)]
次の関数の α-微分を求め、log, Arctan などを用いて表せ.

$$F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx$$

必要なら $\mathrm{Arctan}(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2}$ を用いてもよい.

問題-5. [(10)]
有界閉集合上の関数で、各点収束するが一様収束しない関数列の例を挙げ、その関数列がなぜそうなるのか説明せよ.

問題-6. [(10)]
空間内の半径 r の球面

$$S_r^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

の面積をなんらかの積分を計算することで求めよ.

問題-7. [(10)]
次の級数の収束半径を求めよ．ただし、$0! = 1$ と定める.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

ただし、授業中で紹介した級数の収束の判定法を用いて構わない.