線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 10 回（'14 年 12 月 26 日：Keywords $\cdots$ 正射影ベクトル、シュミットの直交化、）

$\mathbb{K}$ をあるスカラーとして、以下の場合において係数は全て固定して考える.

10-1. 正射影ベクトル $\cdots$ $(V, (,))$ を計量ベクトル空間とする．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を V のベクトルとする．このとき、$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{w}$ への正射影ベクトル $\boldsymbol{a}$ とは、$\boldsymbol{w}$ に平行で、$(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}) = 0$ となるようなベクトルのことである．そのようなベクトルはただ一つ定まり、正射影ベクトルという.

10-2. シュミットの直交化 $\cdots$ 計量ベクトル空間 V があり、一次独立なベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ があるときに、それらのベクトルを使って $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ を満たすように正規直交ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を得る方法.

10-3. $s(\mathbb{R})$ の部分空間 $\cdots$ $s(\mathbb{R})_0 = \{(a_n) \in s(\mathbb{R}) |$ 十分大きい n に対して $a_n = 0\}$

今日の課題.

1. 正射影が計算できること.
2. シュミットの直交化.

B-10-1. [正射影]

次のベクトルの正射影を求めよ.

(1) $\mathbb{R}^2$ の標準計量に関して、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ への正射影.

(2) $\mathbb{R}^3$ の標準計量に関して、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ への正射影.

(3) $\mathbb{R}^4$ の標準計量に関して、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ への正射影.

(4) $P(\mathbb{R})_2$ の計量 $\displaystyle\int_0^1 f \cdot g dx$ に関して、$f(X) = X^2 + X + 1$ の $g(X) = 2 + X$ への直交射影.

(5) $s(\mathbb{R})_0$ の計量 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ に関して、$(1, 1, 0, 0, 0, \cdots)$ の $(1, 1, 1, 1, 0, 0, \cdots)$ への直交射影.

B-10-2. [複素内積]

$(\mathbb{C}^2, (,)_{\mathbb{C}})$ を複素標準内積とする．このとき、$\mathbb{C}^2$ を実線形空間と見たとき、ある実線形写像 $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$ で、$\mathrm{Re}((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{C}}) = (\varphi(\boldsymbol{v}), \varphi(\boldsymbol{w}))$ が成り立つものを与えよ．ただし、$\mathbb{R}^4$ 上の内積は標準内積とする.

B-10-3. [正射影ベクトル]

ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対して、$\boldsymbol{w}$ への正射影を求めよ．ただし、内積は標準内積であるとする.

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $V = \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

B-10-4. [シュミットの直交化]

シュミットの直交化を使って次のベクトルを正規直交化せよ．(1),(2),(3) は実標準内積であり、(4) は複素標準内積とする.

(1) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$

B-10-5. [直交補空間]
$V = \mathbb{R}[X]_2$ において、内積を $(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f \cdot g dx$ によって入れる．このとき、$W = \mathbb{R}[X]_1$ とすると、直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ．

B-10-6. [補空間]
$F : V \to W$ を線形写像とする．このとき、V の部分空間 V' で、F を V' に制限したときに、$F : V' \to W$ が単射であり、$F(V') = \mathrm{Im}(F)$ となるものが存在することを示せ．

B-10-7. [直交射影]
V をベクトル空間とする．$W \subset V$ を 2 次元の部分ベクトル空間とし、その基底を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とする．このとき、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ の W への直交射影を与える公式を求めよ．

B-10-8. [部分空間]
$V = \mathbb{R}[X^2]_4$ を X^2 の多項式で、4 次以下のもの全体とし、V 上の部分空間 $W = \left\{ f \in V | \displaystyle\int_{-1}^{1} f(X)dX = 0 \right\}$ の基底を求めよ．この空間は線形写像 $F : V \to \mathbb{R},\quad F(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(X)dX$ の核である．

B-10-9. [計量の存在]
任意の有限次元実ベクトル空間には必ず実計量が存在することを示せ．

C-10-1. [線形写像の像と核]

$$W = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \right\}$$

とおく．線形写像 $F : W \to \mathbb{R}^3$ を、$F(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} av_1 - v_2 + v_3 + v_4 \\ av_1 + v_2 - v_3 + v_4 \\ av_1 + v_2 + v_3 - v_4 \end{pmatrix}$ とする．ただし、$\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2, v_3, v_4)$ とし、a は実定数とする．このとき、W と $\mathbb{R}^3$ の基底を選んだとき、その基底に関する F の表現行列を A とする．以下の問題に答えよ．

(1) A は $n \times m$-行列とすると、自然数 n, m は何か？

(2) A を求めよ．

(3) a がどのような値のとき $\mathrm{Ker}(F) \neq \{\boldsymbol{0}\}$ となるか？またそのとき、$\mathrm{Ker}(F)$ の基底は何か？

(4) a を $\mathrm{Ker}(F) \neq \{\boldsymbol{0}\}$ となる値とする．次元公式から $\mathrm{rank}(F)$ の値を求め、$\mathrm{Im}(F)$ の基底を求めよ．

（a がある値のとき $\mathrm{Ker}(F)$ は $\{\boldsymbol{0}\}$ ではなくなります．）

C-10-2. [正射影を与える写像]
(1) 上の B-10-3(1) の $V, \boldsymbol{w}$ において、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対してその正射影を与える線形写像 P の表現行列を求めよ.
(2) $P^2 = P$ を示せ.

C-10-3. [シュミットの直交化]
次を $\mathbb{R}^4$ の標準内積をもつ空間のベクトルとする．シュミットの直交化を用いて正規直交基底を与えよ.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

ホームページ： http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：http://motochans.blogspot.jp/（授業内容など）
手習い塾： 水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けています.
以上の問題について悩んだり困ったりした場合は：今一度、ぜひご相談ください．まずはメールにて.