

第11回 ('15年1月9日 : Keywords ... 固有値、固有ベクトル、固有空間)

11-1. 固有値 ... ベクトル空間の間の線形変換 $F: V \rightarrow V$ に対して、あるゼロではないベクトル \mathbf{v} に対して、 $F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ となるような λ のことを F の固有値という。そのような固有値は V が有限次元ベクトル空間である場合には有限集合 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ となる。

この固有値の集合は、 V の基底を定めておいたときに得られる行列 A の行列の固有値の集合と一致する。つまり、どのような基底をとって多項式を計算しても固有値の集合は変わらない。

11-2. 固有多項式 ... 有限次元ベクトル空間の間の線形変換 $F: V \rightarrow V$ に対して、 V のある基底に対する表現行列を A とする。このとき、 $\Phi_A(t) = \det(tE - A)$ を固有多項式という。この多項式は、表現行列の取り方によらずにきまる。つまり、 V の基底の取り方によらず決まる。

11-3. 固有ベクトル ... λ を線形変換 $F: V \rightarrow V$ の固有値とするとき、定義から、ゼロではないベクトル \mathbf{v} が存在して、 $F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ となる。そのようなゼロではないベクトルのことを、 λ に付随する固有ベクトルという。

11-4. 固有空間 ... λ を線形変換 $F: V \rightarrow V$ の固有値とするとき、 $W_\lambda = \{\mathbf{v} \in V | F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ を満たす集合のことを固有空間という。固有空間は定義から明らかに $\{\mathbf{0}\}$ ではなく、1次元以上あるベクトル空間である。

今日の課題.

1. 固有値、固有ベクトルを求めること。
2. 固有空間を求めること。

B-11-1. [固有値と固有ベクトル]

次の線形写像 $F: V \rightarrow V$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$(1) V = \mathbb{C}^2, F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (2) V = \mathbb{C}^2, F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(3) V = \mathbb{C}^3, F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (4) V = P(\mathbb{R})_2, F(f) = \frac{df}{dx}$$

$$(5) V = \{(a_n) \in s(\mathbb{R}) | a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}, F((a_n)) = (a_{n+1})$$

$$(6) V = P(\mathbb{C})_2, F(f(x)) = f'(x) - 2f(2x)$$

B-11-2. [固有空間]

次の線形写像 F の固有空間の基底を全て求めよ。

$$(1) V = \mathbb{C}^2, F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (2) V = \mathbb{C}^2, F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(3) V = \mathbb{C}^3, F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (4) V = P(\mathbb{R})_2, F(f) = \frac{df}{dx}$$

(5) $V = \{(a_n) \in s(\mathbb{R}) \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$, $F((a_n)) = (a_{n+1})$

(6) $V = P(\mathbb{C})_2$, $F(f(x)) = f'(x) - 2f(2x)$

B-11-3. [固有多項式]

固有多項式は表現行列の取り方によらずに定まることを示せ.

B-11-4. [固有値、固有ベクトル]

$V = P(\mathbb{C})_n$ とする. 線形変換 $F : V \rightarrow V$ を $F(f(x)) = f(1+x)$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) F を適当な V の基底に関して表現行列を求めよ.
- (2) F の固有値の集合を求めよ.
- (3) F の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

B-11-5. [固有値]

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ とする. いま, $V = \mathbb{C}[A] = \{f(A) \in M(2, \mathbb{C}) \mid f \in \mathbb{C}[x]\}$ とする. 以下の問いに答えよ. ただし, $\mathbb{C}[x]$ は複素係数の多項式の空間とする.

- (1) V の基底をひとつ求めよ.
- (2) $F : V \rightarrow V$ として, $F(X) = \frac{1}{2}(A \cdot X + X \cdot A)$ とする. このとき, F の固有値と固有多項式を求めよ.
- (3) F の各固有値に対する固有空間を求めよ.

C-11-1. [固有空間]

任意の固有空間の次元は 1 次元以上あり, かつ部分ベクトル空間であることを示せ.

(注: 「明らか」という答えは演習問題の答えとしては適切ではない.)

C-11-2. [固有値、固有空間]

F は $P(\mathbb{R})_2$ 上の線形変換で, $F(f(x)) = f(1-3x)$ を満たすものとする. このとき以下の問題に答えよ.

- (1) F の固有多項式を求めよ.
- (2) F の固有値を求めよ.
- (3) F の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

C-11-3. [関数空間]

$V = \langle \cos x, \sin x \rangle \subset C([0, \pi], \mathbb{C})$ とする. このとき, 線形写像 $R_\theta : V \rightarrow V$ を, $R_\theta(f(x)) = f(x+\theta)$ とする. 以下の問いに答えよ. ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とし, i を虚数単位 $\sqrt{-1}$ の代わりに用いてよい. $C([0, \pi], \mathbb{C})$ は線分 $[0, \pi]$ 上の複素数値連続関数全体である.

- (1) R_θ の固有値を求めよ.
- (2) 各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

ホームページ: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog: <http://mochans.blogspot.jp/> (授業内容など)

手習い塾: 水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けています.

以上の問題について悩んだり困ったりした場合は: 今一度, ぜひご相談ください. まずはメールにて.