線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第12回（'15年1月15日：Keywords ⋯ 対角化可能性）

12-1. 対角化可能 ⋯ 正方行列行列 A が対角可能であるとは、ある正則行列 P が存在して、$P^{-1}AP$ が対角行列であることである.

12-2. 対角化可能のための必要十分条件 ⋯ 対角化可能であるための必要十分条件は、$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ を $n\times n$ 行列 A の固有値とし、W_{λ_i} を λ_i の固有空間としたとき、

$$\mathbb{C}^n = W_{\lambda_1}\oplus W_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_r}$$

が成り立つことである．これは、$\mathbb{C}^n$ において固有ベクトルからなる基底が存在することと同値である.

12-3. 対角化可能であるための十分条件 ⋯ $n\times n$ 正方行列 A の固有値がちょうど n 個あるとき、A は対角化可能である．つまり、固有多項式からすぐに対角化可能であることが判別できる.

12-4. 最小多項式 ⋯ $m_A(t)$ を $f(A)=O$ となる多項式 $f(t)$ のうち最小次数かつ最高次の係数が 1 である多項式のことととして定義する．A が対角化可能であるための必要十分条件は $m_A(t)$ が $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r)$ と 1 次の式に分解できることである.

今日の課題.

1. 正方行列が対角化できるかどうか判定できるようにすること.

B-12-1. [固有値と固有ベクトル]
次の行列は対角化可能か？

(1) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&a\\0&-1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}-1&-1\\4&3\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&4&1\\2&-4&0\end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix}3&0&-2\\-2&1&2\\4&0&3\end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix}2&3&1\\-2&-3&-2\\1&1&2\end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix}2&-2\\-1&3\end{pmatrix}$

B-12-2. [対角化可能性]
$n\times n$ 行列 A の異なる固有値の集合を $\{\lambda_1\cdots,\lambda_k\}$ とする．このとき A が対角化可能であるための必要十分条件は

$$\sum_{s=1}^{k}\mathrm{rank}(\lambda_s E-A)=(k-1)n$$

であることを示せ．ここで、E は単位行列.

B-12-3. [べき零行列の対角化]
べき零行列 A が対角化できるための必要条件は $A=O$ であることである.

B-12-4. [固有値]

a, b, c を実数とする．次のような行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ が実数を固有値にもつとする．このとき、A は対角化可能か？可能なら固有空間の基底を求めよ．

B-12-5. [X の形の行列の対角化可能性]
次の行列 A が対角化可能か調べよ．また可能である場合、$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B-12-6. [あるファンデルモント行列の対角化]

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ の固有多項式を求めよ．また対角化できるかどうか判定せよ．

B-12-7. [固有多項式と固有空間]
(n, n) 行列 A の固有値集合が $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ であるとする．$\Phi_i(t) = \Phi_A(t)/(t - \lambda_i)$ と定義する．このとき、$W_i = \{\Phi_i(A)\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n | \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n\}$ は λ_i の固有空間であることを示せ．

B-12-8. [複素数 z とその行列]

a, b を実数とする．このとき、行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ は対角化可能であることを示せ．また、A^n は $\begin{pmatrix} \alpha_n & -\beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$ とかけ、$z = a + bi$ としたとき、$z^n = \alpha_n + i\beta_n$ であることを示せ．

C-12-1. [対角化可能性]

次の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ は対角化可能かどうか調べよ．

C-12-2. [固有ベクトルからなる基底]
$V = P(\mathbb{C})_2$ とする．線形写像 $F : V \to V$ を $F(f(X)) = f''(2) + f'(1)X + f(0)X^2$ とする．このとき、V には、F の固有ベクトルからなる基底は存在するか？存在するならその基底を求めよ．

C-12-3. [固有空間]
線形写像 $F : V \to V$ に対して λ, η を異なる固有値とする．このとき、固有空間の和 $W_\lambda + W_\eta$ は直和 $W_\lambda \oplus W_\eta$ であることを示せ．
