線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第13回（'15年1月23日：Keywords $\cdots$ 対角化）

13-1. 直交行列 $\cdots$ 実正方行列 A が $A^tA=E$ が成り立つ時、直交行列という.
13-2. ユニタリー行列 $\cdots$ $A^*A=E$ が成り立つ時、行列 A をユニタリー行列という．ここで、A^* とは、$\overline{A^t}$（複素共役転置）のことである.
13-3. 正規行列 $\cdots$ $A^*A=AA^*$ が成り立つとき、A を正規行列という．このとき以下は同値である.
1. A が正規行列である.
2. A はあるユニタリー行列によって対角化できる.
3. $\mathbb{C}^n$ は固有ベクトルからなる正規直交基底をもつ.
4. 固有空間による直和分解 $\mathbb{C}^n=W_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_r}$ に対して、$i\neq j$ なら $W_{\lambda_i}\perp W_{\lambda_j}$ がである.

以下の対称行列、Hermite行列、交代行列、歪Hermite行列は全て正規行列であり、ユニタリー行列（実行列の場合は直交行列）によって対角化される.
13-4. 対称行列 $\cdots$ $A^t=A$ が成り立つとき、A を対称行列という．このとき以下は同値である.
1. A が対称行列である.
2. A はある直交行列によって対角化される.
3. 固有値は全て実数であり、$\mathbb{R}^n$ は A の固有ベクトルからなる正規直交基底をもつ.
4. $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ を固有値全体とし、W_{λ_i} を λ_i に対する固有空間とすると、$\mathbb{R}^n=W_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_r}$ であり、$i\neq j$ ならば $W_{\lambda_i}\perp W_{\lambda_j}$ である.

13-5. Hermite行列、歪Hermite行列、交代行列 $\cdots$
A が正規行列とする．以下が成り立つ.
A がHermite行列 $\Leftrightarrow A^*=A\Leftrightarrow$ 固有値は全て実数
A が歪Hermite行列 $\Leftrightarrow A^*=-A\Leftrightarrow$ 固有値は全て純虚数.

A が実正規行列とする．以下が成り立つ.
A が対称行列 $\Leftrightarrow A^*=A\Leftrightarrow$ 固有値は全て実数
A が交代行列 $\Leftrightarrow A^*=-A\Leftrightarrow$ 固有値は全て純虚数.
13-6. e^A の値 $\cdots$ e^A を e^x のテイラー展開を使って

$$e^A=E+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots$$

として定義する.

今日の課題.
1. 実対称行列を直交行列によって対角化すること.
2. e の行列乗について.

A-13-1. [固有空間の直交性]
次の行列の固有空間を求め、それらが互いに直交していることを示せ.

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1&2i\\-2i&1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

B-13-1. [固有値と固有ベクトル]
次の行列を直交行列によって対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

B-13-2. [固有値と固有ベクトル]
次の行列をユニタリー行列によって対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 2 & -i \\ 1 & i & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 3 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$

B-13-3. [e^{tA} の値]
次の A において、e^{tA} を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

B-13-4. [行列の固有空間]
行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(b \neq 0)$ とする．この行列の固有空間を求め、それらが直交していることをたしかめよ.

C-13-1. [e^A の可換性]
以下の問いに答えよ．以下、2×2 行列で答えて構わない.

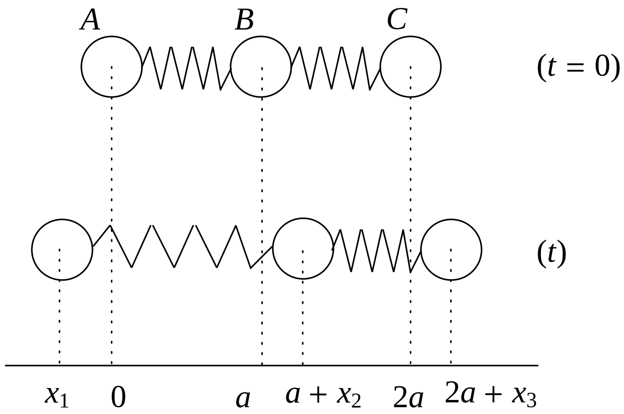
(1) $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ を A の固有値とするとき、e^A の固有値は $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_r}$ であることを示せ.
(2) $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ となるか？また、A, B にどのような条件があれば、可換となるか.

C-13-2. [対称行列の対角化]
次の行列を直交行列によって対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

C-13-3. [ばね]

下のようなばねを外力が働かない空間で考える。



上のばねは時刻 $t = 0$ の場合（自然長）であり、$t = 0$ でこのおもり A, B, C にある速度を与えることによってばね全体が動き出す。この A, B, C の重量は等しく m とする。時刻 t では A, B, C はそれぞれ x_1, x_2, x_3 だけ遷移するとする。上の図はそれを表している。ばね定数はどちらも k として次の問題に答えよ。また単位は MKS 単位系として考えよ。

(1) 時刻 t において質点 A, B, C でのニュートンの運動方程式を遷移 x_1, x_2, x_3 を用いて書き下せ。ただし、x_i の加速度を $\ddot{x}_i$ として表す。

(2) ここで $\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}$ をある行列 A として $-\omega^2 A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ として書きあらわせ。ここで、$\dfrac{k}{m} = \omega^2$ とする。

(3) この行列の固有値と固有空間を求めよ。

(4) この行列 A を対角化せよ。

(5) 今、初期条件において B においてのみ速度 v を与えたとき、このばねはどのように動くか、x_1, x_2, x_3 を t の関数として表せ。ただし、x_i の加速度 $\ddot{x}_i$ は t に関する 2 階微分であり、微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ の解は $\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ の一次結合で書けることを用いてよい。

ホームページ： http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：http://motochans.blogspot.jp/（授業内容など）
手習い塾： 水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けています.
以上の問題について悩んだり困ったりした場合は：今一度、ぜひご相談ください．まずはメールにて.