線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 14 回（'15 年 1 月 30 日：Keywords ··· 上三角化．定数係数常微分方程式）

14-1. 定数係数線形微分方程式 ··· $a_1,\cdots,a_{n-1}$ を定数としたとき、関数 $x(t)$ の n 次常微分方程式

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=0$$

は $\boldsymbol{x}(t)={}^t(x(t),x'(t),x''(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))$ とおくと、ある行列を A とし、

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}$$

とかくことができる．

14-2. $\boldsymbol{x}'(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ の解法 ··· $\boldsymbol{x}(t)={}^t(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$ とする． $\dfrac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}$ を用いることで、

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{tA}\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\\cdots\\x_n(0)\end{pmatrix}$$ と解くことができる．

14-3. 常微分方程式 ···

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=0$$

の解 $x(t)$ は n 次多項式 $y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_1=0$ の解を $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ とするとき、$e^{\lambda_1 t},\cdots,e^{\lambda_n t}$ の一次結合となる．λ が r 重解であるとき、$e^{\lambda t},te^{\lambda t},\cdots,t^{r-1}e^{\lambda t}$ が解となる．

14-4. 上三角化 ··· 正方行列 A は、あるユニタリー行列によって三角化される．つまり、あるユニタリー行列を U とするとき、任意の正方行列は、

$$U^{-1}AU$$

が上三角行列になる．A が実正方行列であり、固有値が全て実数ならば、ある直交行列 P によって、上三角化される．

14-5. 半単純 ··· 線形変換 $F:V\to V$ が半単純であるとは、A の表現行列が対角化可能であることをいう．線形変換が半単純であるための必要十分条件は、固有ベクトルからなる V の基底が存在するときである．

今日の課題.

1. 線形乗微分方程式を解くこと．
2. ユニタリー行列によって三角化を実行する．行列が対角化可能でない場合は、
`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/senkei.html#uesan`
に詳細を書いたのでそちらを参照すること．

A-14-1. [行列の対角化可能性]
次の行列が対角化可能かどうか判定せよ．対角化可能の場合は固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$

A-14-2. [e^{tA} の計算]
A を次の行列のとき、e^{tA} の値を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 36 & -10 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 18 & -17 & 6 \\ 45 & -42 & 17 \end{pmatrix}$

B-14-1. [定数係数常微分方程式]
次の微分方程式を求めよ.

(1) $x'' + 2x' - 3x = 0$

(2) $x'' - x = 0$

(3) $x'' + 2x' + x = 0$

(4) $x''' - 2x'' - 5x' + 6x = 0$

B-14-2. [直交行列による上三角化]
次の行列を直交行列によって上三角化せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

B-14-3. [固有値と固有ベクトル]
$A^2 = A$ を満たす行列の固有値は 0 か 1 であり、対角化可能であることを示せ.

B-14-4. [対称行列の e^A]
A が対称行列であるとき、e^A も対称行列であることを示せ.

B-14-5. [人口移動問題]
ある都市 A とそのまわりにある都市 B,C,D の人口移動を（モデル化して）考える．毎年、A 市の人口の $\dfrac{3}{10}$ が周りの B,C,D 市に移動し、B,C,D 市の人口の総和の $\dfrac{1}{10}$ が B,C,D 市から A 市に移動するものとする．現在から n 年後の B,C,D 市の人口の総和を y_n 人とし、A 市の人口を z_i 人とするとき、y_n, z_n はどのように推移するか、一般項 y_n, z_n を求めよ．ただし、A,B,C,D 市の人口の総和は一定として考えよ.

B-14-6. [差分方程式]
$s(\mathbb{R})$ の中で k 項間漸化式

$$p_{n+k} + a_1 p_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1} p_{n+1} + a_k p_n = 0$$

を満たすものを V とする．適当な漸化式によって考えてもよい.

(1) V は $s(\mathbb{R})$ の中の部分空間であることを示せ.

(2) V は k 個のベクトル $(1, 0, \cdots, 0, 0, \cdots), (0, 1, 0, \cdots, 0, 0, \cdots), \cdots, (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots)$ を基底となることを示せ.

(3) シフト写像 $S : (p_0, p_1, p_2, \cdots) \to (p_1, p_2, p_3, \cdots)$ のこの基底に関する表現行列を求めよ.

(4) S の固有多項式は $t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_k = 0$ であることを示せ.

(5) S の固有値を λ とするとき、${}^t(1, \lambda, \lambda^2, \cdots, \lambda^{k-1})$ は固有ベクトルであることを示せ.

C-14-1. [実対称行列の固有空間の直交性]
A を実対称行列とする．このとき、λ, η を A の相異なる固有値とするとき、$W_\lambda \perp W_\eta$ が成り立つことを示せ.

ホームページ： http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：http://motochans.blogspot.jp/（授業内容など）
手習い塾： 水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けています.

以上の問題について悩んだり困ったりした場合は：今一度、ぜひご相談ください．まずはメールにて.

来週は試験ですが...

カンニングは発見されますと、ほぼ間違いなく停学になりますのでお気を付けください.

以下白紙はノート代わりに使うとか？