# 線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

## 第2回（’14年10月10日：Keywords ⋯ 基底、一次結合）

**2-1. 線形結合** ⋯ $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$ となる形のベクトルのこと．ここで、$c_i$ はスカラー．$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m$ の線形結合全体を $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m\rangle$ と書いて $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m$ で張るベクトル空間という．
**2-2. 線形独立** ⋯ $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ が、$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$ を満たすこと．
**2-3. 線形従属** ⋯ 線形独立でないこと．
**2-4. 基底** ⋯ $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_n$ がベクトル空間 $V$ において線形独立であり、$V$ の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ がそれらの一次結合であること．
**2-5. 標準基底** ⋯ $\mathbb{K}$ 上の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ のこと．ただし $\boldsymbol{e}_i = {}^t(0, \cdots, 0, \overset{i\text{–th}}{1}, 0, \cdots, 0)$.
**2-6. Hom$(V, W)$** ⋯ ベクトル空間 $V, W$ に対して、$V$ から $W$ への線形写像全体.
**2-7. 一次関係 (式)** ⋯ ベクトル $\{\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_m\}$ の間に成り立つ $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ となる関係式のこと．ここで、$a_i$ はあるスカラー.
**2-8. 一次関係全体のなすベクトル空間** ⋯ 一次関係全体のなすベクトル空間は数ベクトル空間の中の部分ベクトル空間になる.

---

**A-2-1.** [ベクトル空間]
次の問題に答えよ.

(1) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m\rangle$ にはどのような加法、スカラー倍が定義されるか？
(2) $\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & b\end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}) \middle| a, b \in \mathbb{C}\right\}$ にはどのような加法とスカラー倍があるか？

**A-2-2.** [数列全体]
数列全体の集合について次の問題に答えなさい.

(1) 実数列全体 $s(\mathbb{R})$ に対して加法、スカラー倍を定義しなさい.
(2) $s(\mathbb{R})$ の中の収束数列全体は部分空間か？
(3) $s(\mathbb{R})$ の中の有界数列全体は部分空間か？

---

### 今日の課題.
1.$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ がベクトル空間の基底であるための条件.
2. 一次独立であるための条件.
3. ベクトル空間の基底を求める方法.

---

**B-2-1.** [一次独立性]
次のベクトルは一次独立か、一次従属か？

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix}$

(4) $V = P(\mathbb{C})_3, \{X + 2X^2, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2\}$

**B-2-2.** [基底となるための条件]
次のベクトルはベクトル空間 $V$ 上基底となるか？

(1) $V = P(\mathbb{R})_2, \{f_1 = 1, f_2 = 1+X, f_3 = 1+X+X^2\}$ (2) $V = \mathbb{C}^3, \{3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\}$

**B-2-3.** [基底となるための必要十分条件]
$\mathbb{C}^n$ のベクトル $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_n$ が基底となるための必要十分条件は行列 $A = (\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_n)$ が正則であることである．

**B-2-4.** [ベクトル空間の基底]
次のベクトル空間 $V$ が有限次元であればその基底を求めよ．

(1) $V = P(\mathbb{C})_3$

(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$

(3) $V = \{f \in P(\mathbb{C})_3 | f(1) = 0\}$

(4) $V = \{f \in C([0,1]) | f(0) = f(1) = 0\}$

**B-2-5.** [$\{\mathbf{0}\}$]
$\{\mathbf{0}\}$ はベクトル空間であることを示せ．この空間に基底は存在するか？

**B-2-6.** [一次関係の成すベクトル空間]
$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ とする．このとき、$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の間の 1 次関係全体はベクトル空間となるか？

**B-2-7.** [一次従属であるための条件]
$\mathbb{C}^n$ における $n+1$ 個の任意のベクトル $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ は一次従属であること示せ．

---

**C-2-1.** [ベクトル空間]
次の $P(\mathbb{C})_2$ におけるベクトルは基底となるか?

$(a)$ $\{2 - 3X + 2X^2, -1 + 2X - X^2, 2 - 3X\}$, $(b)$ $\{-2 + X + 2X^2, 1 - X^2, 5 - 2X - 5X^2\}$

**C-2-2.** [一次独立性]
ベクトル空間 $V$ の 3 つの元 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ のどの 2 つも一次独立であるとする．このときこの 3 つも再び一次独立か？

**C-2-3.** [基底]
つぎのベクトル空間 $W$ の基底を求めよ．

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
（授業内容など．宿題のヒントを書くことも...）
twitter: (https://twitter.com/BasicMathIIB)
相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部．