

第3回 ('14年10月24日 : Keywords ... 基底の変換行列、行列の表示)

3-1. 基底の変換行列 ... 2つの基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ と $\{w_1, \dots, w_n\}$ があつたときに、 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を $\{w_1, \dots, w_n\}$ に変換する基底の変換行列を

$$(w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_n)A$$

とする。つまり、 A は $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$ となる行列 $A = (a_{ij})$ のことである。

3-2. いくつかのベクトルの基底による表示 ... V をベクトル空間とする。 $\mathcal{V} = \{x_1, \dots, x_m\}$ をいくつかのベクトルとし、 $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ を V の基底とする。このとき、 \mathcal{V} の \mathcal{B} による一次結合

$$(x_1, \dots, x_m) = (v_1, \dots, v_n)A$$

を \mathcal{V} の基底 \mathcal{B} による表示という。ここで、 A は $n \times m$ 行列であり、表示行列という。 \mathcal{V} が違う基底である場合、表示行列は基底の変換行列のことである。これは、 A が正則であることと同値である。(定理 6.4)

3-3. 表示行列の一次関係 ... 上の表示行列 A の列ベクトルを $A = (a_1 \cdots a_m)$ とする。このとき、 $\{x_1, \dots, x_m\}$ で成り立つ一次関係は $\{a_1, \dots, a_m\}$ においても成り立ち、逆も成り立つ。つまり、

$$c_1x_1 + \cdots + c_mx_m = 0 \Leftrightarrow c_1a_1 + \cdots + c_ma_m = 0$$

3-4. 基本変形 ... 行の基本変形は、左からある正則行列をかけることに対応します。つまり、 $n \times m$ 行列 A を簡約化した行列を B とすると、ある正則行列 P をつかって

$$B = PA$$

と書けます。 $P = (p_1 \cdots p_n)$ 、 $B = (b_1 \cdots b_m)$ とすれば、この式はベクトル $\{b_1, \dots, b_m\}$ を基底 $\{p_1, \dots, p_n\}$ を使って表示した行列が A であるとみなせます。3-3のことを加味すると、 $A = (a_1 \cdots a_m)$ であるとする、 $\{a_1, \dots, a_m\}$ と $\{b_1, \dots, b_m\}$ は一次関係はまったく同じものになります。 $(b_1 \cdots b_m)$ は簡約化されていますから、簡約行列 B をみて、 A の列ベクトルの中から一次独立なベクトルを探すことは容易になります。

3-5. 対称式 ... 多項式 $F(X_1, \dots, X_n)$ が対称式であるとは、任意の $X_i, X_j (i \neq j)$ に対して、 F の X_i と X_j を入れ替えた多項式 $F(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_n)$ がもとの多項式 $F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n)$ と一致するような多項式のことである。

$s_1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ や $s_n = X_1X_2 \cdots X_n$ は対称式である。一般に $s_j = \sum_{\forall \{i_1, i_2, \dots, i_j\} \subset \{1, \dots, n\}}$ $X_{i_1}X_{i_2} \cdots X_{i_j}$ を

i 次の基本対称式という。対称式全体は多項式全体のベクトル空間の中で部分ベクトル空間になっている。

A-3-1. [一次結合性]

次のベクトル空間 V において任意のベクトル v は次のベクトルの一次結合で表されるか？

(1) $V = P(\mathbb{C})_2, \{1, X - 1, (X - 1)^2\}$

(2) $V = \mathbb{C}^3, \{^t(1, 0, 2), ^t(3, 1, 4), ^t(-1, 0, -1)\}$

A-3-2. [基底]

次のベクトル空間 V の基底を求めよ.

- (1) $V = \{ {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$
- (2) $V = \{ (a_n) \in s(\mathbb{R}) \mid (a_n) : \text{等差数列} \}$

今日の課題.

1. 基底の変換行列の求め方.
 2. いくつかのベクトルを基底を使って表示すること.
 3. いくつかのベクトルの中から一次独立なベクトルを探すこと. まずは数ベクトル空間において. 何週かにわたってやります.
-

B-3-1. [基底の変換行列]

次のベクトル空間 V と 2 つの基底 \mathcal{B}_1 と \mathcal{B}_2 において、 \mathcal{B}_1 を \mathcal{B}_2 にかえる基底の変換行列を求めよ. ただし、 $\{e_i\}$ は数ベクトル空間上の標準基底であるとし、下のベクトルが基底であることは示す必要はない.

- (1) $V = P(\mathbb{C})_2$, $\mathcal{B}_1 = \{1, X, X^2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{1, X - 1, (X - 1)^2\}$
- (2) $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathcal{B}_2 = \{e_2, e_3, e_1\}$
- (3) $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B}_1 = \{ {}^t(1, 1, 1), {}^t(1, 0, 1), {}^t(1, 0, 0) \}$, $\mathcal{B}_2 = \{ {}^t(1, 0, 1), {}^t(0, 0, 1), {}^t(1, 1, 1) \}$
- (4) $V = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^4 \mid \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$, $\mathcal{B}_1 = \{ {}^t(-2, 1, 1, 0), {}^t(2, -2, 0, 1) \}$, $\mathcal{B}_2 = \{ {}^t(-6, 4, 2, -1), {}^t(6, -5, -1, 2) \}$
- (5) $V = \{ (a_n) \in s(\mathbb{R}) \mid a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \}$,
 $\mathcal{B}_1 = \{ (0, 1, 2, 7, 20, \dots), (1, 0, 3, 6, 21, \dots) \}$, $\mathcal{B}_2 = \{ (2, 1, 8, 19, 62, \dots), (3, 1, 11, 25, 83, \dots) \}$

B-3-2. [ベクトルの基底表示]

次のベクトル $\mathcal{V} = \{ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \}$ を基底 $\mathcal{B} = \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \}$ を使ってその表示行列を求め、 \mathcal{V} が基底であるか判定せよ.

- (1) $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{V} = \{ {}^t(1, 1, 1), {}^t(1, -1, 1), {}^t(1, 0, 1) \}$, $\mathcal{B} = \{ {}^t(1, 0, 0), {}^t(1, 1, 0), {}^t(1, 1, 1) \}$
- (2) $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{V} = \{ 1 + X^2, 1 - X^2, 1 + aX + bX^2 \}$, $\mathcal{B} = \{ 1, X, X^2 \}$
- (3) $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{V} = \{ X^2, (X - 1)^2, (X - 2)^2 \}$, $\mathcal{B} = \{ 1, X, X^2 \}$
- (4) $V = P(\mathbb{C})_3$, $\mathcal{V} = \{ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1 \}$, $\mathcal{B} = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \}$
- (5) $V = \{ (a_n) \in s(\mathbb{R}) \mid (a_n) : \text{等差数列} \}$, $\mathcal{V} = \{ (2, 4, 6, \dots), (1, 3, 5, \dots) \}$, $\mathcal{B} = \{ (1, 1, 1, \dots), (1, 2, 3, \dots) \}$
- (6) $V = \{ f(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3] \mid f(X_1, X_2, X_3) : 3 \text{ 次対称式} \}$, $\mathcal{V} = \{ t_1^3, t_1 t_2, t_3 \}$, $\mathcal{B} = \{ s_1^3, s_1 s_2, s_3 \}$
ここで、 s_i は上の対称式で書いたものと同じとし、 $t_1 = s_1, t_2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2, t_3 = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$
と定義する.

B-3-3. [一次関係]

つぎの行列のたてベクトルの中から一次独立なベクトルを探せ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B-3-4. [関数空間]

実ベクトル空間 $C([0, 2\pi])$ の部分ベクトル空間 $V = \langle 1, \cos^2 \theta, \cos \theta \sin \theta \rangle$ を考える. このとき、以下の問題に答えよ.

- (1) $\{1, \cos^2 \theta, \cos \theta \sin \theta\}$ は実数上のベクトル空間において一次独立であることを示せ.
- (2) ベクトル $\{1, \cos 2\theta, \sin 2\theta\}$ を上の基底で表せ.

C-3-1. [基底であるための必要十分条件]

$f(X) \in P(\mathbb{C})_2$ とする. このとき、 $\{f(X), f'(X), f''(X)\}$ が $P(\mathbb{C})_2$ 上基底となるための $f(X)$ の必要十分条件を求めよ.

C-3-2. [フィボナッチ数列]

フィボナッチ数列 (a_n) ($n \geq 1$) とは漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列のことである. V を $s(\mathbb{R})$ の部分空間で、フィボナッチ数列全体からなるものとする. つまり、

$$V = \{(a_n) \in s(\mathbb{R}) \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$$

である. 以下の問題に答えよ.

- (1) α, β を $x^2 = x + 1$ の 2 つの相異なる解とする. このとき、 $v_1 = (\alpha^{n-1})$, $v_2 = (\beta^{n-1})$ はフィボナッチ数列であることを示せ.
- (2) $\{v_1, v_2\}$ は V 上の基底となることを示せ.
- (3) $w_1 = (1, 0, 1, 1, 2, \dots)$ と $w_2 = (0, 1, 1, 2, 3, \dots)$ を v_1, v_2 によって表示せよ. また、その表示行列の性質から $\{w_1, w_2\}$ も V 上の基底であることを示せ.

C-3-3. [基底の表示の一意性]

V を有限生成ベクトル空間とし、基底 \mathcal{V} をひとつ選ぶ. このとき、 \mathcal{V} を用いた $\forall v \in V$ の一次結合の表し方は一意的であることを示せ.

ホームページ: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog: <http://mochans.blogspot.jp/> (授業内容など)

手習い塾: 水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けます.

困ったときは: 質問など随時受け付けています. まずはメールにて.