# 線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

## 第4回（'14 年 10 月 31 日：Keywords ··· ベクトル空間の次元、一次独立なベクトルの最大数、基底の延長）

**4-1. 次元 ···** ベクトル空間 $V$ の基底の数のこと．$\{\mathbf{0}\}$ でないベクトル空間で、有限個の基底が存在しないベクトル空間の次元は $\infty$ といい、$\dim(V)$ とかく．
**4-2. 一次独立のベクトルの最大数 ···** いくつかのベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ のうち一次独立なベクトルの最大数 $r$ とは、この中のベクトルの中に $r$ 個の一次独立なベクトルがあり、かつ $r+1$ 個のどのベクトルも一次従属であること．$\dim\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\rangle$ は、$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 中の一次独立なベクトルの最大数に等しい．
**4-3. 基底の延長 ···** 有限次元ベクトル空間 $V$ における一次独立なベクトル $S = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots \boldsymbol{v}_k\}$ に対して、$S$ にいくつかのベクトル $T = \{\boldsymbol{v}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を足して基底とすることができる．
$W = \langle S\rangle$ とするとき、部分空間 $W' = \langle T\rangle$ は $W$ の**補空間**という．

---

**A-4-1.** [いくつかのベクトルの行列表示]
次のベクトルを適当な基底により表示しそれらが基底であるかどうか判定せよ．

(1) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\-5\end{pmatrix}\right\}$

(2) $\{X^2-1, 2X^2-X-3, X^2-2\}$

---

**今日の課題.**
1. ベクトル空間の次元
2. いくつかのベクトルから一次独立なベクトルを（最大数）探すこと．
3. 一次独立なベクトルを延長し、基底をつくること．

---

**B-4-1.** [次元]
次のベクトル空間の次元を求めよ．

(1) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \middle| \begin{cases}2x+y+z-w=0\\ 3x+3z-w=0\\ 3x+y+2z-w=0\end{cases}\right\}$

(2) $\{f(X) \in P(\mathbb{C})_2 | f(X) = f(1-X)\}$

**B-4-2.** [一次関係]
つぎの行列のたてベクトルの中から一次独立なベクトルを最大数探せ．

(1) $\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&3&8&3\\1&0&1&1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}0&2&2&2&-3\\1&2&1&3&3\\0&-3&-3&-3&5\end{pmatrix}$

**B-4-3.** [一次独立なベクトルの最大数]
次のベクトルの中から一次独立なベクトルを最大個数求めよ．また、そのほかのベクトルをそのベクトルの一次結合でかけ．

(1) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\10\\-6\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\-3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-4\\7\\0\end{pmatrix}$

(5) $X+1, X-1, 2X$.

(6) $X^2-X-1,\ 2X,\ 2X^2-2X-1,\ X^2-X$

**B-4-4.** [基底の延長]
ベクトル空間 $V$ において、次の一次独立なベクトルに、ベクトルをいくつか追加して、基底にせよ.

(1) $V=\mathbb{C}^3,\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(2) $V=\mathbb{C}^3,\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(3) $V=\mathbb{C}^3\ \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

(4) $V=P(\mathbb{C})_2,\ 2X^2+X,\ 2X-2$

**B-4-5.** [一次従属]
ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ が一次従属であることの必要十分条件は、あるベクトル $\boldsymbol{v}_k$ が存在して、$\boldsymbol{v}_k$ が他のベクトルの一次結合で書けることであることを示せ.

**B-4-6.** [一次関係]
次の多項式の間に成り立つ一次関係を求めよ.

$$X^2,\ (X+1)^2,\ (X+2)^2,\ (X+3)^2$$

---

**C-4-1.** [ベクトル空間の次元]
次の部分空間の次元を求めよ.

$$\{f(X)\in P(\mathbb{C})_2 | f(2-X)=f(X)\}$$

**C-4-2.** [一次独立の最大数]
次のベクトルの中で、一次独立なベクトルを最大数選び出し、その他のベクトルをそれらの一次結合で表せ.
$f_1=1+X+3X^2,\ f_2=1+2X-X^3,\ f_3=1+3X-3X^2-2X^3,\ f_4=-2-4X+X^2-X^3,$
$f_5=-1-4X+7X^2$

**C-4-3.** [補空間の基底]
ベクトル空間 $V=P(\mathbb{C})_3$ の部分ベクトル空間 $\langle X^2-3X+1, 2X^2-6X+3, X^2-3X+2\rangle$ の補空間の基底を求めよ.

ホームページ： http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：http://motochans.blogspot.jp/（授業内容など）
手習い塾： 水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けています.
困ったときは： 質問など随時受け付けています. まずはメールにて.