# 線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

## 第5回（'14年11月6日：Keywords ··· 直和）

**5-1.** $\{\mathbf{0}\}$の次元 ··· $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$と定める．
**5-2.** ベクトル空間の和 ··· $V_1, V_2$をベクトル空間$V$の部分空間とする．
このとき、$V_1 + V_2 = \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V | \boldsymbol{v}_i \in V_i\}$となる部分ベクトル空間．
**5-3.** 直和 ··· ベクトル空間$V$が$V = V_1 + V_2$となり、$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$となるとき$V$は$V_1, V_2$の直和といい、

$$V = V_1 \oplus V_2$$

とかく．
これは、任意の$\boldsymbol{v} \in V$が$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$と一意的に分解されることと同値である．一意的な分解とは、$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i \in V_i)$ならば、$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_i$を意味する．
**5-4.** ベクトル空間の和（および直和）の次元公式··· $V_1, V_2$が有限次元ベクトル空間とする．$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$とくに、$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.
**5-5.** 補空間 ··· $W$をベクトル空間$V$の部分空間のとき、$V = W \oplus W'$となる部分空間$W'$を$W$の補空間という．

---

**A-5-1.** [一次独立なベクトルを最大数]
次のベクトルから一次独立なベクトルを最大数探せ．

(1) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}\right\}$

(2) $\{X^2 - 1, 2X^2 - X - 3, X^2 - 2\}$

---

### 今日の課題.
1. ベクトル空間が２つの部分ベクトル空間の直和であるとは．
1. ある２つの部分ベクトル空間$V_1, V_2 \subset V$が$V$上で直和であるかどうか判定すること．

---

**B-5-1.** $[V = V_1 + V_2]$
次のベクトル空間$V_1, V_2$は$V$の和として書けるか？もし書ければ証明を、そうでない場合はそう書けないベクトルを探せ．

(1) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \left\{v \in V | \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}\right\},\ V_2 = \left\{v \in V | \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}\right\}$

(2) $V = P(\mathbb{R}),\ V_1 = \{f(X) \in V | f'(X) = f(X)\},\ V_2 = \{f(X) \in V | f'(X) = 0\}$

(3) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \langle {}^t(1, 2, -1), {}^t(0, 1, 1)\rangle,\ V_2 = \langle {}^t(1, 1, -2)\rangle$

**B-5-2.** $[V_1 \cap V_2]$
$V_1, V_2$が$V$の部分ベクトル空間であるとき、$V_1 \cap V_2$も$V$の部分ベクトル空間である．今、下のような$V_1, V_2 \subset V$のとき、$V_1 \cap V_2$を求めよ．

(1) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \left\{\boldsymbol{v} \in V | \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}\right\},\ V_2 = \left\{\boldsymbol{v} \in V | \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}\right\}$

(2) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \langle {}^t(1, 2, -1), {}^t(0, 1, 1)\rangle,\ V_2 = \langle {}^t(1, 1, -2)\rangle$

(3) $V = P(\mathbb{R})_2,\ V_1 = \langle X^2 + X - 1, X^2 + 1\rangle,\ V_2 = \langle X + 1\rangle$

(4) $V = P(\mathbb{R})_2,\ V_1 = \langle X^2 + 2X - 1, X^2 + 1\rangle, \langle X - 1\rangle$

**B-5-3.** [直和]

(1) $V_1 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | x_1 - x_3 = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$ とするとき、$\mathbb{C}^3 = V_1 \oplus V_2$ となることを示せ.

(2) $V_1 = \langle 1 + X, X + X^2\rangle, V_2 = \langle 1 + 2X + X^2, 1 + X^3\rangle$ とすると、$V_1$ と $V_2$ は $\mathbb{C}[X]_3$ 上で直和にならないことを示せ.

**B-5-4.** [直和]

次の 2 つのベクトル $V_1, V_2$ はベクトル空間 $V$ の直和となるか示せ.

(1) $V = \mathbb{C}^4, V_1 =, V_2$

(2) $V = \mathbb{C}[X]_3,\ V_1 = \langle 1 + X, 1 + X + X^2 + X^3\rangle, V_2 = \langle 1, 1 + X + X^3\rangle$

**B-5-5.** [部分空間の次元]

$W \subset V$ を有限次元ベクトル空間 $V$ 内の部分ベクトル空間とする．このとき、$\dim(W) \leq \dim(V)$ であることを示せ．さらに、$\dim(W) = \dim(V)$ なら、$W = V$ であることを示せ.

---

**C-5-1.** [直和]

次のベクトル空間 $V_1, V_2$ は $V$ において直和であるかどうか示せ.

(1) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,\ V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$

(2) $V = \mathbb{C}[X]_3,\ V_1 = \left\langle 1 + X + X^2 + X^3, 1 + 3X + 3X^2 + 2X^3 \right\rangle, V_2 = \left\langle X + 2X^2, 1 + 4X + 3X^2 + 3X^3 \right\rangle$

**C-5-2.** [関数空間上の直和]

ベクトル空間 $C(\mathbb{R})$ の部分集合 $X, Y$ をそれぞれ

$$X = \{f \in C(\mathbb{R}) | f(-x) = f(x)\ (\forall x)\}$$

$$Y = \{f \in C(\mathbb{R}) | f(-x) = -f(x)\ (\forall x)\}$$

で定義する.

1. $X, Y$ は共に $C(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ.
2. $W = X + Y$ は直和であることを示せ.
3. $W = C(\mathbb{R})$ は正しいか? 正しければ証明し, そうでなければ $C(\mathbb{R}) \setminus W$ の元を具体的に与えよ.

**C-5-3.** [$\mathbb{C}^2$ 内の実ベクトル空間]

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ のスカラーを実数に制限することによって, $\mathbb{C}^2$ を実ベクトル空間とみなすことにする.

1. $\dim(\mathbb{C}^2) = 4$ を示せ.
2. $\mathbf{C}^2 = W \oplus \mathbb{R}^2$ をみたす $\mathbb{C}^2$ の部分空間 $W$ の基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を 1 組与えよ.

**D-5-1.** [塩谷先生からの問題]
上の C-3-3 のつづきの問題として以下を答えよ.

3. $\mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ を固定する. $\mathbb{C}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{4} a_i \boldsymbol{x}_i$ とかけたとき、実ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

を基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ の下での $\boldsymbol{x}$ のアバターと呼ぶことにする. $\mathbb{C}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の、基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ の下でのアバター $\boldsymbol{y}$ と, 基底 $\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4$ の下でのアバター $\boldsymbol{z}$ について

$$\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y}$$

をみたす $A \in M(4, \mathbb{R})$ を求めよ.

**D-5-2.** [塩谷先生からの問題]
以下の中から, $W$ がベクトル空間 $V$ の部分空間でないものをすべて挙げよ. また, 部分空間でないことを示すベクトルの具体例を与えよ.

(1) $V = \mathbb{K}^n$, $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$. ただし $A \in M(n; K)$.

(2) $V = s(\mathbb{R})$, $W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R}) | (x_k)$ は有界 $\}$.

(3) $V = s(\mathbb{R})$, $W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R}) | \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}$.

(4) $V = s(\mathbb{R})$, $W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R}) |$ 有限個の $k$ を除いて $x_k = 0\}$.

(5) $V = s(\mathbb{R})$, $W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R}) |$ 無限個の $k$ について $x_k = 0\}$.

(6) $V = s(\mathbb{R})$, $W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R}) | x_{k+3} = 3x_k \ (\forall k)\}$.

(7) $V = s(\mathbb{R})$, $W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R}) | x_{k+3} = x_k^3 \ (\forall k)\}$

(8) $V = M(n, K)$, $W = \{A \in M(n, K) | A$ は正則 $\}$

**D-5-3.** [塩谷先生からの問題]
$V$ を $n$ 次元ベクトル空間とし, $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ をその基底とする. また, $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_k$ $(k < n)$ を $V$ の線形独立なベクトルとする. このとき, $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ からいくつかベクトルを選んで $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_k$ に付け加えると $V$ の基底が得られることを示せ.

---

**E-5-1.** [**C-3-1.** のこたえ．]
$f(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ とする．３つのベクトル $\{f(X), f'(X), f''(X)\}$ を基底 $\{X^2, X, 1\}$ を使って行列表示すると、

$$(f(X), f'(X), f''(X)) = (X^2, X, 1)\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 2a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & 2a_2 \end{pmatrix}$$

となる．$\{f(X), f'(X), f''(X)\}$ が基底となる必要十分条件はこの表示行列が正則であることである．行列が正則であるための必要十分条件は表示行列の行列式が 0 でないことである．ゆえに、

$$\det\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 2a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & 2a_2 \end{pmatrix} = 4a_0^3 \neq 0$$

ゆえに、$a_2 \neq 0$ と同値である．つまり、$\{f(X), f'(X), f''(X)\}$ が基底となるための必要十分条件は $f(X)$ が 2 次多項式であることである．

**E-5-2.** [**C-3-2.** のこたえ．]
問題をよく読みましょう．この問題においてフィボナッチ数列とは、$1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$ だけではなく、$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ となる実数列全体を指します．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ であることを示す．それは、任意の整数 $n > 0$ に対して、$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$ を示せばよい．これは、$\alpha^n(\alpha^2 - \alpha - 1) = 0$ と同値だが、$\alpha$ は $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるので成り立つ．ゆえに、$\boldsymbol{v}_1 \in V$ がいえる．同じように $\boldsymbol{v}_2 \in V$ がいえる．

(2) 一次独立性について. 実数 $c_i$ $(i = 1, 2)$ に対して、$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = 0$ であると仮定する．ここで、$V$ のベクトル空間の加法、スカラー倍を使って、これは、任意の $n > 0$ に対して、$c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} = 0$ が成り立つことと同値．特に、$n = 1$ のとき、$c_1 + c_2 = 0$、$n = 2$ のとき、$\alpha c_1 + \beta c_2 = 0$ が成り立つ．よって、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = -\alpha + \beta \neq 0$ であるので、逆行列をかけることで、$c_1 = c_2 = 0$ となる．よって、一次独立性がいえた．
一次結合性について. 任意の $\boldsymbol{v} = (a_n) \in V$ に対して、上の $\alpha, \beta$ を使って漸化式を下のように変形する．

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

これを繰り返し用いて、

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta^n(a_2 - \alpha a_1) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha^n(a_2 - \beta a_1) \end{cases}$$

この 2 式を引いて、$(\beta - \alpha)a_{n+1} = \beta^n(a_2 - \alpha a_1) - \alpha^n(a_2 - \beta a_1)$．ゆえに、

$$a_n = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha}\beta^{n-1} - \frac{a_2 - \beta a_1}{\beta - \alpha}\alpha^{n-1} \quad (n > 1) \qquad (*)$$

となり、$a_1 = \dfrac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha} - \dfrac{a_2 - \beta a_1}{\beta - \alpha}$ であるから、$(*)$ は $n = 1$ のときも成り立つ．ゆえに、$\boldsymbol{v} = \dfrac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha} \cdot (\beta^{n-1}) - \dfrac{a_2 - \beta a_1}{\beta - \alpha} \cdot (\alpha^{n-1})$ が成り立つ．
（この最後の式は、実数上の式ではなく、数列をベクトルとしたときのベクトルの和とスカラー倍であることに注意せよ．つまり、

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha} \cdot (1, \alpha, \alpha^2, \cdots) - \frac{a_2 - \beta a_1}{\beta - \alpha} \cdot (1, \beta, \beta^2, \cdots)$$

を書いているのである.）
よって一次結合性がいえた．ゆえに、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $V$ 上の基底である．

(3) $\boldsymbol{w}_1 = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{w}_2 = c\boldsymbol{v}_1 + d\boldsymbol{v}_2$ とおく．初項を比べることで、$a + b = 1, c + d = 0$、第 2 項を比べることで、$a\alpha + b\beta = 0, c\alpha + d\beta = 1$ となる．つまり、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = E$$

ゆえに、逆行列を掛けることで、

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

となる．ベクトル $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ で表示すると、

$$(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} \frac{\beta}{\beta-\alpha} & \frac{-1}{\beta-\alpha} \\ \frac{-\alpha}{\beta-\alpha} & \frac{1}{\beta-\alpha} \end{pmatrix}$$

表示行列の行列式を計算する．

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\beta}{\beta-\alpha} & \frac{-1}{\beta-\alpha} \\ \frac{-\alpha}{\beta-\alpha} & \frac{1}{\beta-\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\det\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta-\alpha} \neq 0$$

表示行列が正則であるので、$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ も基底となる．

（注意）3 項間漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ は、初項と第 2 項を決めれば、それ以降の項は自動的に定まるので、漸化式をひとつ決めておけば、そのような数列は初項と第 2 項が等しいことと数列が等しいことは同値になる．なので、3 項目以降は比べる必要はなかったのである．

**E-5-3.** [**C-3-3.** のこたえ．]

$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ とする．もし、ある $\boldsymbol{v} \in V$ が 2 通りの一次結合

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n$$

と表せたとき、両辺を引いて、

$$(a_1 - b_1)\boldsymbol{v}_1 + (a_2 - b_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

となる．しかし、$\mathcal{V}$ は一次独立であるので、$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$ が成り立つ．ゆえに、$\boldsymbol{v}$ の一次結合の表し方は 2 通り以上ないことがわかる．

これらの問題のこたえは模範解答であるが、些細な計算の道筋違いや、細かい議論の有無はあっても、議論の筋道においてこれ以外の解答はありえない．わかっていないと思われる解答、もしくは意味不明な解答には×がつけてある．

ホームページ：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html`
（主にプリントのダウンロード用）
blog：`http://motochans.blogspot.jp/`（授業内容など）
手習い塾： 水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けています．
以上の問題について悩んだり困ったりした場合は：今一度、ぜひご相談ください．まずはメールにて．