線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第6回（'14年11月13日：Keywords ⋯ 試験対策、発表）

今日の課題.

1. 以下の試験対策問題を解くこと（発表してもよい）.
2. 今までの問題を発表する.

A-6-1. [直和]

(1) $V_1 = \left\{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | x_1 - x_3 = 0\right\}, V_2 = \left\{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\right\}$ とするとき、$\mathbb{C}^3 = V_1 \oplus V_2$ となることを示せ.

(2) $V_1 = \langle 1 + X, X + X^2 \rangle, V_2 = \langle 1 + 2X + X^2, 1 + X^3 \rangle$ とすると、V_1 と V_2 は $\mathbb{C}[X]_3$ 上で直和にならないことを示せ.

A-6-2. [直和]

次の 2 つのベクトル V_1, V_2 はベクトル空間 V の直和となるか示せ.

(1) $V = \mathbb{C}^4, V_1 =, V_2$

(2) $V = \mathbb{C}[X]_3,\ V_1 = \langle 1 + X, 1 + X + X^2 + X^3 \rangle, V_2 = \langle 1, 1 + X + X^3 \rangle$

D-6-1. [塩谷先生からの問題]

上の C-3-3 のつづきの問題として以下を答えよ.

3. $\mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ を固定する. $\mathbb{C}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{4} a_i \boldsymbol{x}_i$ とかけたとき、実ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

を基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ の下での $\boldsymbol{x}$ のアバターと呼ぶことにする. $\mathbb{C}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の、基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ の下でのアバター $\boldsymbol{y}$ と, 基底 $\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4$ の下でのアバター $\boldsymbol{z}$ について

$$\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y}$$

をみたす $A \in M(4, \mathbb{R})$ を求めよ.

D-6-2. [塩谷先生からの問題]

以下の中から, W がベクトル空間 V の部分空間でないものをすべて挙げよ. また, 部分空間でないことを示すベクトルの具体例を与えよ.

(1) $V = \mathbb{K}^n, W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$. ただし $A \in M(n; K)$.

(2) $V = s(\mathbb{R}), W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R}) | (x_k)$ は有界$\}$.

(3) $V = s(\mathbb{R}), W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R}) | \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}$.

(4) $V = s(\mathbb{R}), W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R})|$ 有限個の k を除いて $x_k = 0\}$.

(5) $V = s(\mathbb{R}), W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R})|$ 無限個の k について $x_k = 0\}$.

(6) $V = s(\mathbb{R}), W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R})|x_{k+3} = 3x_k\ (\forall k)\}$.

(7) $V = s(\mathbb{R}), W = \{(x_k) \in s(\mathbb{R})|x_{k+3} = x_k^3\ (\forall k)\}$

(8) $V = M(n, K), W = \{A \in M(n, K)|A$ は正則 $\}$

D-6-3. [塩谷先生からの問題]
V を n 次元ベクトル空間とし, $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ をその基底とする. また, $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_k$ $(k < n)$ を V の線形独立なベクトルとする. このとき, $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ からいくつかベクトルを選んで $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_k$ に付け加えると V の基底が得られることを示せ.

B-6-1. [直和]

(1) $V_1 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | x_1 - x_3 = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$ とするとき、$\mathbb{C}^3 = V_1 \oplus V_2$ となることを示せ.

(2) $V_1 = \langle 1 + X, X + X^2 \rangle, V_2 = \langle 1 + 2X + X^2, 1 + X^3 \rangle$ とすると、V_1 と V_2 は $\mathbb{C}[X]_3$ 上で直和にならないことを示せ.

(3) (a) $V_i (i = 1, 2, 3)$ をベクトル空間 V の部分ベクトル空間とする. $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ かつ $V_1 \cap V_3 = \{\mathbf{0}\}$ であるとき、$V_2 \cap V_3 = \{0\}$ となるか？
(b) $\{\mathbf{0}\}$ はベクトル空間だが、$V \oplus W = V \Leftrightarrow W = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ.

(4) $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ に対して、v が任意の v_i と 1 次独立であるとき、V と $\langle v \rangle$ は直和を構成するか？ただし、$v_i \neq \mathbf{0}$ とする.

(5) V をベクトル空間とする. $\mathbf{v}_i (i = 1, \cdots, s), \mathbf{w}_j (j = 1, \cdots, t)$ を V の 1 次独立なベクトルとして $V_1 = \langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s \rangle$, $V_2 = \langle \mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t \rangle$ とする. このとき、任意の $1 \le i \le s$ と $1 \le j \le t$ に対して、$\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t\}$ と $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_j\}$ が 1 次独立であるとしても $V_1 + V_2$ はそれぞれの直和になるとは限らないことを示せ.

(6) n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とし、固有空間を V_{λ_i} とする. このとき、$V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間となることを示せ.

B-6-2. [基底、次元]

(1) ベクトル空間 V の部分空間 W をとる. また、V はある部分空間 V_1, V_2 に対して、$V = V_1 \oplus V_2$ であるとき、$W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap V_2)$ となるか.

(2) A を $(n-1) \times n$ 行列とする. また、$\mathrm{rank}(A) = n-1$ とする. このとき、$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ とおく. このとき、ある横ベクトル $(a_1, \cdots, a_n)$ が存在して、$\{\mathbf{x} \in W | (a_1, \cdots, a_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$ となることを示せ.

C-6-1. [行列のつくるベクトル空間]
A を $n \times n$ 対角行列とする．つまり、$A = (a_{ij})$ とすると、$a_{ii} = \lambda_i$ かつ、$a_{ij} = 0\ (i \neq j)$ である．このとき、A を変数とする多項式で書ける行列全体の集合を $\mathbb{C}[A]$ と書く．つまり、

$$\mathbb{C}[A] = \{a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m | a_i \in \mathbb{C}\}$$

である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\dim(\mathbb{C}[A]) \leq n$ であることを示せ．

(2) $\{\lambda_i\}$ が相異なる n 個の数であるとき、$E, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ は一次独立であることを示せ．つまり、$\mathbb{C}[A]$ の基底となることを示せ．

C-6-2. [$\mathbb{Q}$ 上ベクトル空間]
$\mathbb{Q}$ 上ベクトル空間において、$\{1, \sqrt{2}\}$ は一次独立であることを示せ．また、$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ ではどうか？

E-6-1. [**C-4-1.** のこたえ．]
$f(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ とする．このとき、$f(X) - f(2-X) = a_2(X^2 - (2-X)^2) + a_1(X - (2-X)) = a_2(4X-4) + a_1(2X-2) = (4a_2 + 2a_1)X - 4a_2 - 2a_1 = 0$ は、$2a_2 + a_1 = 0$ が成り立つから、これを解いて、$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c, d \in \mathbb{C})$ このベクトルは、$1, -2X + X^2$ に対応し、線形独立であるかどうかは行列表示された、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の立てベクトルが線形独立であるかどうかである．これは、この行列が rank = 2 であるかどうかと同値である．簡約化して、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ゆえに、$1, -2X + X^2$ は線形独立であり、明らかにこの空間を生成しているので、基底となる．ゆえに、次元は 2.

E-6-2. [**C-4-2.** のこたえ．]
このベクトルを $\{1, X, X^2, X^3\}$ によって行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 7 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに、最大数の一次独立なベクトルは f_1, f_2, f_4．また、他のベクトルの一次関係は、$f_3 = -f_1 + f_2, f_5 = 2f_1 - f_2 + f_4$ となる．

E-6-3. [**C-4-3.** のこたえ．]
$\boldsymbol{v}_1 = X^2 - 3X + 1, \boldsymbol{v}_2 = 2X^2 - 6X + 3, \boldsymbol{v}_3 = X^2 - 3X + 2$ とし、$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ とする．$\{1, X, X^2, X^3\}$ を使ってベクトルを行列表示すると、$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり、これに標準基底 $\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ を

付け加えたものを簡約化すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であり、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は W において基底となる．また、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, (1, X, X^2, X^3)\boldsymbol{e}_2, (1, X, X^2, X^3)\boldsymbol{e}_4 \rangle$ は V の基底となる．V の $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ 以外の基底ベクトルは W の V における補空間の基底をなす．ゆえに、補空間の基底は、$\{X, X^3\}$ となる．

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：http://motochans.blogspot.jp/（授業内容など）
手習い塾： 水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けています.

以上の問題について悩んだり困ったりした場合は：今一度、ぜひご相談ください．まずはメールにて.