

第7回 ('14年12月5日 : Keywords ... 線形写像、核、像、同型写像)

$\mathbb{K}$ をあるスカラーとして、以下の場合において係数は全て固定して考える。

7-1. 線形写像 ... ベクトル空間 V, W の間の写像 $f : V \rightarrow W$ において、以下の性質を満たすもの。

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2), \quad f(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$$

7-2. 核と像 ... $f : V \rightarrow W$ を線形写像として、 $\{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ を核といい、 $\text{Ker}(f)$ で表し、 $\{f(\mathbf{v}) \in W \mid \mathbf{v} \in V\}$ を像といい $\text{Im}(f)$ で表す。

7-3. (線形) 同型写像 ... 線形写像 $f : V \rightarrow W$ が全単射であるとき、 f は (線形) 同型写像という。

7-4. 基底を与えることと線形同型写像を与えることの同値性 ... V, W を同型なベクトル空間とし、 V のある基底を固定しておく。このとき、 W の基底を与えることと、同型写像 $f : V \rightarrow W$ を与えることとは同値である。

7-5. 次元と同型性 ... n 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間は全て同型である。

7-6. 直積集合 ... V, W を集合とする。このとき、 $V \times W$ は $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ となる組全体の集合のことであり、直積集合という。特に、 V, W が2つのベクトル空間の場合、 $V \times W$ 上に以下の加法とスカラー倍

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2), \quad \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\alpha \mathbf{v}, \alpha \mathbf{w})$$

を定義してできるベクトル空間のことを直和といい、 $V \oplus W$ とかく。

今日の課題.

1. 線形写像が何かわかること。
 2. 核、像を理解すること。
-

B-7-1. [線形写像]

以下の写像 F は線形写像か? ($F(f)(x)$ の書き方に注意せよ.)

(1) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}$

(2) $F : V \oplus V \rightarrow V, F(\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = \mathbf{v} + \mathbf{w}$

(3) $F : V \rightarrow V, F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ ただし、 $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ はあるベクトル。

(4) $F : P(\mathbb{R})_2 \rightarrow \mathbb{R}, F(f) = f(1)$

(5) $F : P(\mathbb{R})_3 \rightarrow P(\mathbb{R})_3, F(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = (a_0 + 2a_1) + (2a_2 + 3a_3)X + (a_1 + a_2 + a_3)X^2 + a_0X^3$

(6) $F : P(\mathbb{R})_2 \rightarrow P(\mathbb{R})_2, F(a_0 + a_1X + a_2X^2) = 2 + (a_0 + 2a_1)X + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)X^2$

(7) $F : P(\mathbb{R})_2 \rightarrow P(\mathbb{R})_4, F(f)(x) = (f(x))^2$

(8) $F : P(\mathbb{R})_2 \rightarrow P(\mathbb{R})_2, F(f)(x) = f(1-x)$

(9) $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, F(f) = \int_0^1 f(x)dx$

(10) $F : C(\mathbb{R}) \rightarrow s(\mathbb{R}), F(f) = \left(\int_{n-1}^n f(x)dx \right)$

(11) $F : P(\mathbb{R})_2 \rightarrow P(\mathbb{R})_2, F(f)(x) = f(1-x).$

(12) V, W の基底を $\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_m\}$ としたときに、 $F(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = (w_1, \dots, w_m)A$ と定義する。ここで、 A は $m \times n$ 行列。

(13) $F : \{(a_n) \in s(\mathbb{R}) \mid \text{十分大きい任意の } n \text{ に対して } a_n = 0\} \rightarrow P(\mathbb{R}), F((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

B-7-2. [Ker(F)]

前問題において、線形であった写像において、その $\text{Ker}(F)$ を求めよ。

B-7-3. [基底と同型写像]

V, W を同型なベクトル空間であり、 V の基底をひとつ固定したとき、同型写像 $f : V \rightarrow W$ を与えることと、 W の基底をあたえることは同値であること示せ。

B-7-4. [同型写像]

V, W の線形写像全体 $\text{Hom}(V, W)$ はベクトル空間となるか？また同型写像全体はベクトル空間になるか？

B-7-5. [トレース]

$\text{tr} : \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ を行列のトレースをとる写像とする。このとき、 tr は線形であることを示せ。

B-7-6. [Im(F)]

$F : V \rightarrow W$ をベクトル空間上の写像とする。このとき、 $\text{Im}(F)$ がベクトル空間であるなら、 F は線形写像か？もしそうなら証明せよ。そうでなければ反例を挙げよ。

C-7-1. [線形写像]

次の写像は線形であるか？もしそうなら証明せよ。そうでなければそうならないベクトルを挙げよ。

(1) $g(x) = 1 + x + x^2$ とし、 $F : P(\mathbb{R})_2 \rightarrow P(\mathbb{R})_4, F(f)(x) = g(x)f(x)$

(2) $F : P(\mathbb{R})_2 \oplus P(\mathbb{R})_2 \oplus P(\mathbb{R})_2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(f, g, h) = (\int_0^1 f(x)g(x)dx, \int_0^1 g(x)h(x)dx)$

C-7-2. [Ker(F)]

$F : V \rightarrow W$ を線形写像とする。 $\text{Ker}(F) = \{0\}$ であることと、 F が単射であることは同値（必要十分）であることを示せ。

C-7-3. [線形写像]

$F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ を $F(v) = Av$ として定義し、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、単射線形写像 $i : \text{Im}(F) \rightarrow \mathbb{C}^3$ を $F \circ i = \text{Id}$ をみたすように、つまり、任意の $v \in \text{Im}(F)$ に対して、 $F(i(v)) = v$ となるように i を構成せよ。

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog：<http://motoshans.blogspot.jp/> (授業内容など)

手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けています。

以上の問題について悩んだり困ったりした場合は：今一度、ぜひご相談ください。まずはメールにて。