線形代数II演習 担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第8回（'14年12月12日：Keywords ··· 表現行列、基底の変換行列）

$\mathbb{K}$ をあるスカラーとして、以下の場合において係数は全て固定して考える．

8-1. 表現行列 ··· $F: V \to W$ を線形写像とする．V, W の基底をそれぞれ、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$、$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$ とする．このとき、$(F(\boldsymbol{v}_1), F(\boldsymbol{v}_2), \cdots, F(\boldsymbol{v}_n))$ の $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$ による表示行列のことを f の表現行列という．つまり、

$$(F(\boldsymbol{v}_1), F(\boldsymbol{v}_2), \cdots, F(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)A$$

と書いたときの A が F の表現行列である．

8-2. 表現行列と基底変換 ··· $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_n$ への基底の変換行列を P、$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$ から $\boldsymbol{w}'_1, \cdots, \boldsymbol{w}'_m$ への基底の変換行列を Q とする．このとき、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$、$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$ に関する表現行列を A とし、$\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_n$、$\boldsymbol{w}'_1, \cdots, \boldsymbol{w}'_m$ に関する基底の変換行列を B とすると、以下の等式が成り立つ．

$$B = Q^{-1}AP$$

となる．

今日の課題.

1. 表現行列はどのように計算するか.
2. できれば基底の変換行列との関係もおさえる.

A-8-1. [線形写像]

次の写像は線形写像を与えているか？

(1) $F: V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \to \mathbb{R}^3, F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ F(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $F: V = P(\mathbb{R})_2 \to V, F(f(X)) = f(1-X) + f(X)$

B-8-1. [表現行列]

以下の線形写像 F に対して指定の基底を使った表現行列を求めよ．

(1) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, F(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}, \ \{e_1, e_2\}, \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ それぞれ標準基底

(2) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}, \ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ F(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(4) $F: P(\mathbb{R})_2 \to P(\mathbb{R})_2, \ F(f(X)) = 2f'(X) + 3f(X), \ \{1, X, X^2\}$

B-8-2. [表現行列]

線形写像 $F: \mathbb{C}[X]_2 \to \mathbb{C}[X]_2$ を

$$F(a + bX + cX^2) = a + b + c + (a - b + c)X + (-a + b - c)X^2$$

とするとき、$\mathbb{C}[X]_2$ の基底 $\{1, X, X^2\}$ に関する F の表現行列を求めよ．

B-8-3. [微分が与える線形写像]
$\partial_X : P(\mathbb{C})_2 \to P(\mathbb{C})_2$ を X に関する微分が与える写像とする．つまり、$\partial_X(f(X)) = df(X)/dX$．
このとき、$P(\mathbb{C})_2$ の適当な基底を選ぶことで、∂_X の表現行列を求めよ．

B-8-4. [核を求めること]
次の写像 $F : \mathbb{C}[X]_3 \to \mathbb{C}[X]_2$ の核（Ker(F)）の基底を求めよ．

$$F(f(X)) = f(-X) - f(2 - X)$$

B-8-5. [線形写像の合成]
線形写像の合成も線形写像であることを示せ．また、同型写像の合成も同型写像であることを示せ．

C-8-1. [表現行列]
$\mathbb{C}^3$ の基底 $\{{}^t(1, 2, 1), {}^t(-1, 0, 1), {}^t(0, 0, 1)\}$ に対して、線形写像

$$F : \mathbb{C}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$$

の表現行列を求めよ．

C-8-2. [基底の変換行列と表現行列]
線形写像を以下のように定義する．

$$F : P(\mathbb{R})_2 \to P(\mathbb{R})_2, F(f(X)) = f'(X)X + f(0)X^2 + f(1)$$

このとき、以下を求めよ．

(1) $S = \{1, X, X^2\}$ としたとき、F の表現行列はどのように計算されるか？
(2) $T = \{1 + X, X + X^2, X^2\}$ としたとき、S から T への基底の変換行列を求め、T による F の表現行列を求めよ．

C-8-3. [フィボナッチ数列]
フィボナッチ数列全体のなすベクトル空間

$$V = \{(x_n) \in \mathbb{C}^\infty | x_{n+1} = x_n + x_{n-1} (n \geq 2)\}$$

を考える．V の元を数列 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ のように表したとき、次のような数列のシフト写像

$$f : (a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots) \mapsto (a_3, a_4, a_5, a_6 \cdots)$$

を V の適当な基底を使って表現せよ．
（ヒント : 初項と第 2 項が $(1, 0), (0, 1)$ となるような 2 つのベクトルを基底として考えてみよ.）

ホームページ： `http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html`
（主にプリントのダウンロード用）
blog : `http://motochans.blogspot.jp/`（授業内容など）
手習い塾： 水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けています.
以上の問題について悩んだり困ったりした場合は：今一度、ぜひご相談ください．まずはメールにて.