

第9回 ('14年12月19日 : Keywords ... 計量ベクトル空間)

$\mathbb{K}$ をあるスカラーとして、以下の場合において係数は全て固定して考える。

9-1. 重要な次元公式 ... 線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して、以下が成り立つ。

$$\text{null}(f) + \text{rank}(f) = n = \dim V$$

9-2. 計量ベクトル空間 ... V は複素 (or 実) ベクトル空間とする。計量ベクトル空間 $(V, (\cdot, \cdot))$ とは、内積の定まっているベクトル空間。ベクトル空間のある付加構造。計量ベクトル空間と書く場合、 $(\cdot, \cdot)$ を略す場合がある。

9-3. 数ベクトル空間の標準内積 ... よくある $\mathbb{R}^n$ の内積は、 $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ 、 $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$ とすると、 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ である。これは、実数ベクトル空間の標準内積とよばれている。また、 $\mathbb{C}^n$ のよくある内積は、 $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ 、 $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$ とすると、 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$ であり、複素数ベクトル空間の標準内積とよばれている。複素計量ベクトル空間は一般に、 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$ の性質を持つ。ベクトル $\mathbf{v} \in V$ のノルム $\|\mathbf{v}\|$ は $\sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ と定義する。

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ をベクトル空間 V の基底とすると、 $((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))$ はエルミート行列 (実の場合は対称行列)。

9-4. 直交 ... $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が直交するとは、 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となることである。

今日の課題.

1. 計量ベクトル空間とはなにか理解すること。

A-9-1. [線形写像]

次の線形写像の核と像の基底を求めよ。また、重要な次元公式が成り立つことを明らかにせよ。

$$(1) \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{v} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$(2) P(\mathbb{R})_2 \rightarrow P(\mathbb{R})_3 \ni f(X) \mapsto f(X^2) - f(X^2 + 1)$$

B-9-1. [計量ベクトル空間]

次の積が内積を与えるか判定せよ。

$$(1) \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2u_1 v_1 + u_2 v_1 + u_1 v_2 + 2u_2 v_2$$

$$(2) f(x), g(x) \in C([0, 1]), (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$(3) (a_n), (b_n) \in \{(r_n) \in s(\mathbb{R}) \mid \text{十分大きい } n \text{ に対して } r_n = 0\}, ((a_n), (b_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

$$(4) \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2u_1 v_1 + u_2 v_1 + u_1 v_2 + 2u_2 v_2 + u_3 + v_3$$

$$(5) f(x), g(x) \in C^1([0, 1]), (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$$

B-9-2. [内積]

- (1) 実計量ベクトル空間 $(\mathbb{R}^2, (\cdot, \cdot))$ が $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1, (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1, (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 2$ を満たすとき、 $\|3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2\|$ を求めよ。
- (2) 実計量ベクトル空間 $(\mathbb{R}^2, (\cdot, \cdot))$ が $\|\mathbf{e}_1\| = 1, \|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\| = 2, \|\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\| = 3$ を満たすとき、 $\|\mathbf{e}_2\|$ を求めよ。

B-9-3. [内積]

- (1) B-9-1(1) の内積に対して、 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の内積をそれぞれ求めよ。
- (2) 以下の部分ベクトル空間の直交補空間を求めよ。

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$$

- (3) 以下の部分ベクトル空間の直交補空間を求めよ。

$$\{f \in P(\mathbb{R})_3 \mid f'(X) = 0\}$$

B-9-4. [表現行列]

$\mathbb{C}[x, y]$ において次数が 2 の多項式全体を V_2 とする。また、 x^2, xy, y^2 を基底としておく。このとき、線形写像 $F_i : V_2 \rightarrow V_2$ ($i = 1, 2$) を以下のおきかえで定義したとき、 F_i の表現行列を求めよ。

$$F_1 : x \mapsto x + y \quad y \mapsto y$$

$$F_2 : x \mapsto -y \quad y \mapsto -x$$

このとき、 F_1, F_2 の核と像を求めよ。

C-9-1. [直交補空間]

$V = P(\mathbb{R})_2$ とし、B-9-1(2) のような内積をいれておく。 $W = \langle X - 1 \rangle$ とする。以下の問題に答えよ。

- (1) $W^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \forall \mathbf{w} \in W\}$ は V の部分ベクトル空間を成すことを示せ。
- (2) $W^\perp$ の基底を求めよ。

(Hint: (1) $W^\perp$ は W に直交するベクトルからなるベクトル空間。 (2) $\mathbf{v} = ax^2 + bx + c$ などとおいて求めてもよい。)

C-9-2. [内積の等式]

以下の等式を任意の実計量ベクトル空間において証明せよ。

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2\}$$

C-9-3. [直交性と一次独立性]

零ベクトルでないベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が互いに直交するとき、これらは一次独立であることを示せ。

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/senkei14.html>
(主にプリントのダウンロード用)

blog：<http://motochans.blogspot.jp/> (授業内容など)

手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて数学の質問を受け付けています.

以上の問題について悩んだり困ったりした場合は：今一度、ぜひご相談ください. まずはメールにて.