

**第15回** ('15年2月6日 : Keywords ... 定期テスト)

以下の問題をいくつか選んで答えよ。定期試験の配分は40点であるが、それ以上答えても成績に加算される。

**問題-1.** [(5+7+8)]

次のような $\mathbb{C}^4$ の部分空間 $W$ を考える

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^4 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$$

- (1)  $W$ の次元を求めよ。
- (2)  $W$ の基底を一組求めよ。
- (3)  $W$ の補空間の基底を一組求めよ。(直交補空間である必要はない)

**問題-2.** [(5+5+5)]

次の行列について以下の問題に答えよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 固有値を全て求めよ。
- (2) 固有空間の基底を求めよ。
- (3) この行列を対角化する直交行列を求めよ。

**問題-3.** [(10)]

$V$ を $x, y$ を変数とする2次式 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  ( $a, b, c \in \mathbb{C}$ )の全体の空間とする。線形写像 $F : V \rightarrow V$ を $F(f(x, y)) = f(x - y, x + y)$ として定義する。このとき、以下の問題に答えよ。

- (1)  $V$ の適当な基底において、線形写像 $F$ の表現行列を求めよ。
- (2)  $F$ は同型写像であることを示せ。

**問題-4.** [(10)]

$A, B$ を $n$ 次の正方行列とし、 $A, B$ は相異なる固有値を持つとする。このとき、以下を示せ。

$$AB = BA \Leftrightarrow A, B \text{の固有空間は一致する}$$