

数学リテラシー 1

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 2 回 ('22 年 4 月 19 日)

演習問題

問題 2,3 は動画の中に解説あり。

問題 1 [単射・全射 1]

次の写像は単射であるかどうか、全射であるかどうか、判定せよ。

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ として $x \mapsto x^3$
- (2) 任意の集合 A に対して、 $f: A \rightarrow A$ として $a \mapsto a$
- (3) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ として、 $n \mapsto 2n$
- (4) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ として $x \mapsto 2x$

問題 2 [単射・全射 2]

写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ に対して以下を示せ。

- (1) f, g が単射であれば、 $g \circ f$ も単射である。
- (2) f, g が全射であれば、 $g \circ f$ も全射である。

問題 3 [単射・全射 3]

写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ に対して以下を示せ。

- (1) $g \circ f$ が単射であれば、 f も単射である。
- (2) $g \circ f$ が全射であれば、 g も全射である。

問題 4 [和集合と共通集合と像]

写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、 $C_1, C_2 \subset A$ に対して、以下を示せ。

- (1) $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$
- (2) $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$

もし余裕があれば、以下も解いてみよう。

問題 5 [和集合と共通集合と逆像]

写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、 $D_1, D_2 \subset B$ に対して、以下を示せ。

- (1) $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$
- (2) $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$

問題 6 [共通集合と像]

上の問題 4-(1) で、“ \subset ”が“ $=$ ”とならない例を考えよ。

問題 7 [像と逆像]

写像 $f: A \rightarrow B$ と、 $C \subset A$ と $D \subset B$ に対して、

(1) $f^{-1}(f(C)) \supset C$

(2) $f(f^{-1}(D)) \subset D$

が成り立つことを示せ。また、 \supset や \subset が等式とならない例を示せ。