数学リテラシー1

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第4回 ('22 年 4 月 26 日)

演習問題

問題 1 [2×2 行列の逆行列]

正則行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$B=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とするとき、$AB=BA=E_2$ となることを示せ。

問題 2 [非正則な 2×2 行列]

$ad-bc=0$ とする。$\tilde{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ のとき、$A\tilde{A}$ と $\tilde{A}A$ はどうなるか？

問題 3 [行列と 1 次変換 1]

行列 $A\in M(m,n,\mathbb{R}),\ B\in M(n,\ell,\mathbb{R})$ に対して, 等式 ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$ が成り立つことを示せ.

問題 4 [行列と 1 次変換 2]

n 次正方行列 A の逆行列 A^{-1} は存在すれば一意に定まることを示せ.

問題 5 [行列と 1 次変換 3]

以下の行列の逆行列を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

問題 6 [逆行列]

次の行列は逆行列が存在するか？存在するなら逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

問題 7 [行列と 1 次変換 4]

2 次の正方行列 $A,B\in M(2,\mathbb{R})$ に対して, 等式

$$\det(AB)=(\det A)(\det B)$$

が成り立つことを示せ.

問題 8 [逆写像と逆行列]

逆行列の定義で、$AB=BA=E_n$ は、逆写像の定義 $f\circ g=\mathrm{id}_B,\ g\circ f=\mathrm{id}_A$ の性質に酷似しているが、この間にどのような関係があるか？

(Hint: 行列は写像と考えられるのだろうか？)

問題 9 [線型写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の場合]

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が線形であれば、ある実数 a が存在して、$f(x)=ax$ となることを示せ。

$\boxed{\text{番外問題 1}}$ [行列の積]
行列 $A=(a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\in M(m,n,\mathbb{R})$, $B=(b_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le \ell}\in M(n,\ell,\mathbb{R})$ の積を

$$C=(c_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le \ell}\in M(m,\ell,\mathbb{R}),$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad (1\le i\le m, 1\le j\le \ell)$$

と定義した理由を考えよ. また, その他に定義可能な積は存在するか.

前回の解答例

$\boxed{\text{問題}}$
写像 $f\colon A\to B$ と部分集合 $C_1,C_2\subset A$ に対して,

$$f(C_1\cap C_2)\subset f(C_1)\cap f(C_2)$$

を示せ.

Proof. 任意に $b\in f(C_1\cap C_2)$ を取る. このとき定義から, ある $a\in C_1\cap C_2$ が存在して, $b=f(a)$ が成り立っている. ここで, $a\in C_1$ であるので $b\in f(C_1)$ となり, 同時に $a\in C_2$ であるので $b\in f(C_2)$ となることが分かる. 従って, $b\in f(C_1)\cap f(C_2)$ となるので, $f(C_1\cap C_2)\subset f(C_1)\cap f(C_2)$ が得られた.

$\square$