$\boxed{\text{数学リテラシー1}}$

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第4回（'22年4月26日)

演習問題答え

$\boxed{\text{問題 1}}$ [2×2 行列の逆行列]

正則行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$B=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とするとき、$AB=BA=E_2$ となることを示せ。

(答え)

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E_2 \end{aligned}$$

よって、$AB=BA=E_2$ となることがわかる。

$\boxed{\text{問題 2}}$ [非正則な 2×2 行列]

$ad-bc=0$ とする。$\tilde{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ のとき、$A\tilde{A}$ と $\tilde{A}A$ はどうなるか？

(答え)

$$\begin{aligned} A\tilde{A} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}A &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 3}}$ [行列と 1 次変換 1]
行列 $A \in M(m, n, \mathbb{R}),\ B \in M(n, \ell, \mathbb{R})$ に対して, 等式 ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを示せ.
(答え) 教科書の問 3.1.2 の答えを見よ。

$\boxed{\text{問題 4}}$ [行列と 1 次変換 2]
n 次正方行列 A の逆行列 A^{-1} は存在すれば一意に定まることを示せ.
(答え) 教科書の問 3.1.3 の答えを見よ。

$\boxed{\text{問題 5}}$ [行列と 1 次変換 3]
以下の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(答え) $\det A = 1 \neq 0$ であるから逆行列が存在する。教科書の式 (3.1.1) から $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ がわかる。同様に $\det B = 2 \neq 0$ であるから逆行列が存在する。教科書の式 (3.1.1) から $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$。

$\boxed{\text{問題 6}}$ [逆行列]
次の行列は逆行列が存在するか？存在するなら逆行列を求めよ。
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
(答え) (1) 存在しない。 (2)$-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (3)$ac-b^2 \neq 0$ の場合 : $\dfrac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $ac-b^2=0$ の場合:存在しない。 (4)$-\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{問題 7}}$ [行列と 1 次変換 4]
2 次の正方行列 $A, B \in M(2, \mathbb{R})$ に対して, 等式

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

が成り立つことを示せ.
(答え) 教科書の問 3.1.6 の答えを見よ。

$\boxed{\text{問題 8}}$ [逆写像と逆行列]
逆行列の定義で、$AB = BA = E_n$ は、逆写像の定義 $f \circ g = \mathrm{id}_B,\ g \circ f = \mathrm{id}_A$ の性質に酷似しているが、この間にどのような関係があるか？
(Hint: 行列は写像と考えられるのだろうか？)
(答え) $f \circ g = \mathrm{id}_B,\ g \circ f = \mathrm{id}_A$ を行列の言葉に言い直したものが $AB = BA = E_n$ であり、両者は線型写像の場合には同じことを言っている。

(証明) 線形写像 f が全単射なら、線型写像 $f;\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に逆写像 g が存在する。線型写像の逆写像も線型写像である。なぜなら、f の逆写像を g とすると、任意の $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、f の線形性を使って、

$$
\begin{aligned}
f(g(\vec{x}+\vec{y})) &= f \circ g(\vec{x}+\vec{y}) \\
&= \vec{x}+\vec{y} \\
&= f \circ g(\vec{x}) + f \circ g(\vec{y}) = f(g(\vec{x})) + f(g(\vec{y})) = f(g(\vec{x}) + g(\vec{y}))
\end{aligned}
$$

この両辺に g を施すと、$g(f(g(\vec{x}+\vec{y}))) = g(f(g(\vec{x})+g(\vec{y})))$ となるが、$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ であるから、$g(\vec{x}+\vec{y}) = g(\vec{x}) + g(\vec{y})$ となる。また、同様に、a を任意の実数として、$f(g(a\vec{x})) = a\vec{x} = af \circ g(\vec{x}) = f(ag(\vec{x}))$ であるから、この式に両辺に g を施すことで、$g(a\vec{x}) = ag(\vec{x})$ となる。ゆえに、g も線型写像となる。つまり、$g = f_B$ となる正方行列 B が存在する。よって、

$$f_A \circ f_B = f_{AB} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f_{E_n}$$

$$f_B \circ f_A = f_{BA} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f_{E_n}$$

となる。このとき、$BA = AB = E_n$ がいえる。 $\square$

上の証明の中で最後に用いた、「$m \times n$ 行列 X, Y が $f_X = f_Y$ ならば、$X = Y$ である」を証明しておく。

(証明) $\vec{e_i} \in \mathbb{R}^n$ を i 成分が 1 でその他が全て 0 であるようなベクトルとする。このようなベクトルは $\mathbb{R}^n$ の標準ベクトルや標準基底といったりする。第 4 回のスライドの中にも出てくる。このとき、$f_X = f_Y$ であるとすると、$f_X(\vec{e_i}) = X\vec{e_i} = f_Y(\vec{e_i}) = Y\vec{e_i}$ である。$X\vec{e}_1 = Y\vec{e_i}$ は X と Y の第 i 列が等しいことを意味する。よって、X と Y の第 i 列が全て等しいのだから、$X = Y$ となる。 $\square$

$\boxed{\text{問題 9}}$ [線型写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の場合]
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が線形であれば、ある実数 a が存在して、$f(x) = ax$ となることを示せ。

(答え) 4 回目講義資料の 19 から 22 ページを参照してください。$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ を 1 に書き換えればよい。

$\boxed{\text{番外問題 1}}$ [行列の積]
行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in M(m, n, \mathbb{R}),\ B = (b_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le \ell} \in M(n, \ell, \mathbb{R})$ の積を

$$C = (c_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le \ell} \in M(m, \ell, \mathbb{R}),$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le \ell)$$

と定義した理由を考えよ. また, その他に定義可能な積は存在するか.