

数学リテラシー 1

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 5 回 ('22 年 4 月 29 日)

演習問題

問題 1 [線形写像による原点の値]

$\vec{0}_n$ として \mathbb{R}^n の零ベクトルを表すとする. 任意の線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は

$$f(\vec{0}_n) = \vec{0}_m$$

を満たすことを示せ.

問題 2 [拡大・縮小]

次の一次変換を表す 2×2 行列 A を求めよ.

- (1) x 軸方向に 2 倍拡大し, y 軸方向に -3 倍拡大する変換.
- (2) x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍拡大し, y 軸方向に -1 倍拡大する変換.

問題 3 [回転を表す行列]

次の平面上の一次変換を表す 2×2 行列 A を求めよ.

- (1) 原点を中心とした 30° の回転.
- (2) 原点を中心とした -45° の回転

問題 4 [回転の合成]

平面上において、原点を中心とした θ 回転を表す回転行列を R_θ とするとき、

$$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

を満たすことを示せ.

問題 5 [拡大縮小かつ回転]

平面上の、 x, y 軸方向の拡大縮小変換かつ回転変換は、恒等変換もしくは原点を中心とした点対称変換であることを示せ.

問題 6 [一次変換によって移動する点]

次の変換によって、以下の点 P はどの点に移るか?

- (1) 原点を中心に 60° 回転における点 $P(1, 2)$.
- (2) 原点を中心に 120° 回転における点 $P(3, 5)$.

問題 7 $[x, y$ 軸に沿っていない拡大を表す行列]

$y = x$ 方向に 2 倍, $y = -x$ 方向に 3 倍拡大する一次変換を表す行列はどのように作ればよいだろうか?

問題 8 [原点を中心としない回転]

平面上の $(1, 1)$ を中心とした θ 回転は線形写像であるか? もしそうでないなら、なぜそうか?

問題 9 [回転行列と複素数]

複素数 $z = x + iy$ に $\cos \theta + i \sin \theta$ を掛けると、複素平面で 0 を中心として、 z を θ 回転したものになる。

これを利用して、 θ 回転の回転行列が $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ であることを示せ。

問題 10 [鏡映変換]

次の直線を対称軸とした鏡映変換を表す行列を求めよ。

(1) $y = 0$

(2) $y = \sqrt{3}x$

(3) $y = x$

問題 11 [直線を軸とした鏡映変換]

$y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ を対称軸とした鏡映変換において、以下の点は平面上のどこに移るか?

(1) $(1, 2)$

(2) $(-3, 1)$