微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

宿題解答編

宿題 10-1 (1) $t = \dfrac{1}{1+x^3}$ とすると、$x = (t^{-1}-1)^{\frac{1}{3}}$ であるから、

$$dx = \frac{1}{3}(t^{-1}-1)^{-\frac{2}{3}}(-t^{-2})dt = -\frac{1}{3}t^{-\frac{4}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}dt$$

より、

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = -\frac{1}{3}\int_1^0 t^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{4}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^{-\frac{5}{6}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\sqrt{\pi}}$$

(2) $t = 1-x^4$ とすると、$x = (1-t)^{\frac{1}{4}}$ であるから、$dx = -\dfrac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt$ より、

$$\int_0^1 \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{4}\int_1^0 (1-t)^{\frac{5}{4}}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{4\Gamma(2)}$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

(3) $t = \sin^2\theta$ とすると、$dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta = 2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}d\theta$ であるから、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}d\theta = \int_0^1 \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt$$

$$= \frac{B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)}{2} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

さらに、$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$ を使えば、$\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi$ より、求める式は、$\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ となる。

宿題 10-2

(1) $t = \dfrac{1}{1+x}$ とすると、$x = \dfrac{1-t}{t}$ であり、$dx = -t^{-2}dt$ であるから、

$$\int_0^\infty \frac{x^b}{(1+x)^{a+3}}dx = -\int_1^0 \frac{(1-t)^b}{t^b}t^{a+3}t^{-2}dt = \int_0^1 t^{a-b+1}(1-t)^b dt$$

$$= B(a-b+2,b+1) = \frac{\Gamma(a-b+2)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+3)}$$

(2) $t = \sin^2\theta$ とおくと、$1-t = \cos^2\theta$ であり、$dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta = 2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}d\theta$ であるから、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a\theta\cos^b\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{a}{2}}(1-t)^{\frac{b}{2}}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{a-1}{2}}(1-t)^{\frac{b-1}{2}}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right)$$