担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

宿題解答編

宿題 1-1 略解 (1)

$$\sqrt{5n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=\frac{2\sqrt{5n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}\to\sqrt{\frac{5}{2}}$$

□

(2) $0<a_n=\dfrac{2^n}{n!}<\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{n}\to 0$ より、挟み撃ちの原理から $a_n\to 0$ となる。 □

$\dfrac{2^n}{n!}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{n!}$ で、それぞれの和が 0 に収束するから a_n に収束するという解答がありました。もちろんこれでは答えになりません。つまり $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ となった時、$b_k\to 0$ ならば $a_n\to 0$ とする議論ですが、それならば、$a_n=1$ となる数列で、

$$1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\to 0+0+\cdots+0=0$$

が成り立つことになります。

宿題 1-2 略解 (1) 相加相乗平均により。

(2) $\sqrt{a_nb_n}-a_n=\sqrt{a_n}(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})>0$ また、$\dfrac{a_n+b_n}{2}-b_n=\dfrac{a_n-b_n}{2}<0$ より。

(3) $a_n<b_1$ かつ $b_n>a_1$ より数列 a_n は上に有界な単調増加また、b_n は下に有界な単調減少であるから極限値が存在し、極限値をそれぞれ a,b とすると、$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ の極限を取ることで、$a=\sqrt{ab}$ より $a=b$ となる。

宿題 1-3 略解 $s=-\log\sqrt{x}$ とする。このとき、$\log x^{\sqrt{x}}=-\dfrac{2s}{e^s}$ である。$n\le s<n+1$ を満たす整数 n をとる。n を十分大きくとり、$e>2$ を使うと、

$$|\frac{2s}{e^s}|<\frac{2(n+1)}{2^n}<\frac{2(n+1)}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{4(n+1)}{n(n-1)}<\frac{8(n-1)}{(n-1)^2}=\frac{8}{n-1}<\frac{8}{s-2}\to 0(s\to\infty)$$

とし、よって $y=\log x$ の連続性を用いると、$x^{\sqrt{x}}\to 1$ となる。