微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

宿題解答編

宿題 2-1 略解

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}-\frac{\cos x-1}{x}\right)\frac{x}{\sin x}=1$$

ここで、微分の定義から、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=(e^x)'|_{x=0}=e^x|_{x=0}=1$ と $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=(\cos x)'|_{x=0}=(-\sin x)|_{x=0}=0$ を用いた。

(2) $y=\mathrm{Artanh}\,x$ とおくと、$x=\tanh y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$ より、$x(e^{2y}+1)=e^{2y}-1$ を解いて、$e^{2y}=\dfrac{1+x}{1-x}$ より、$2y=\log\dfrac{1+x}{1-x}$ より、$y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$

(3) 逆関数の微分法により、$y=\dfrac{1}{(\tanh y)'}=\cosh^2 y=\dfrac{1}{1-\tanh^2 y}=\dfrac{1}{1-x^2}$

(4) 合成関数の微分法を用いることにより、

$$\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=-\frac{2x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x^2}}$$

宿題 2-2 略解

(1) $n>0$ の場合、$f(n)=f(1)+f(n-1)=f(1)+f(1)+f(n-2)=\cdots=f(1)+f(1)+\cdots+f(1)=nf(1)$ により、$c=f(1)$ とおくことで、$f(n)=cn$ が成り立つ。また、$n=0$ の場合も明らかに成り立つ。$n<0$ の場合、$0=f(0)=f(n+(-n))=f(n)+f(-n)$ により、$f(n)=-f(-n)=-((-n)c)=nc$ により成り立つ。よって、n が整数の場合 $f(n)=nc$ が成り立つ。

(2) r を有理数とし、$r=\dfrac{m}{n}$ と表す。ここで m,n は整数かつ $n>0$ とする。このとき、$mc=f(m)=f(nr)=f(r)+f((n-1)r)=\cdots=f(r)+f(r)+\cdots+f(r)=nf(r)$ が成り立つ。よって、$f(r)=\dfrac{m}{n}c=rc$ が成り立つ。

(3) 有理数の稠密性により、$\alpha\in\mathbb{R}$ と自然数 n に対して、$\alpha-\dfrac{1}{n}<a_n<\alpha$ となる有理数 a_n が存在する。$n\to\infty$ のとき、$\alpha-\dfrac{1}{n}\to\alpha$ であるから、挟み撃ちの原理により、$a_n\to\alpha$ となる。よって、

$$f(\alpha)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}ra_n=r\alpha$$

よって、任意の実数の場合にも $f(x)=cx$ が成り立つ。