$\boxed{\text{微積分演習S}}$[FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

宿題解答編

$\boxed{\text{宿題 3-1 略解}}$

$f(x)=\sqrt{1+x}$ とする。このとき、$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ となる。$f''(x)=\frac{1}{2}\frac{-1}{2}(1+x)^{\frac{-3}{2}}$ 自然数 k に対して、

$$f^{(k)}(x)=\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\cdots\frac{-2k+3}{2}(1+x)^{\frac{-2k+1}{2}}$$

が成り立つとすると、

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\cdots\frac{-2k+1}{2}(1+x)^{\frac{-2k-1}{2}}$$

となり、帰納的に、任意の自然数 n に対して、

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\cdots\frac{-2n+3}{2}(1+x)^{\frac{-2n+1}{2}}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}(1+x)^{\frac{-2n+1}{2}}$$

$\boxed{\text{宿題 3-2 略解}}$

$$f'(x)=\sqrt{a^2-x^2}+x\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}+a^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\frac{1}{a}=\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$f''(x)=-\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

であるから、

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}+a^2\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+a^2\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}\right)a^2$$

$$f'\left(\frac{a}{2}\right)=2\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{3}a$$

$$f''\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{2\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\boxed{\text{宿題 3-3 略解}}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2(x-1)}$ とすると、

$$f'(x)=f(x)(\log f(x))'=f(x)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=-f(x)\frac{5x^2+3x-4}{2x(x^2-1)}=-\frac{5x^2+3x-4}{2x^3(x-1)^2\sqrt{x+1}}$$