微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

宿題解答編

宿題 4-1 略解 (1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ と定義する。この時 $f(x)$ は連続関数であり、$x\neq 0$ の時微分可能となる。$f'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin h-h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{2h}=\dfrac{1}{2}=0$ よって $x=0$ でも微分可能。$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ となり、$f'(x)$ も連続である。

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{x^3}-\frac{e^{\sin x}}{\sin(x^3)} &= \frac{e^x\sin(x^3)-x^3e^{\sin x}}{x^3\sin(x^3)}=e^x\frac{x^3}{\sin(x^3)}\frac{\sin(x^3)-x^3e^{\sin(x)-x}}{x^6}\\ &= e^x\frac{x^3}{\sin(x^3)}\frac{f(x^3)-e^{\sin(x)-x}}{x^3}\end{aligned}$$

$x\to 0$ において $\dfrac{f(x^3)-e^{\sin x-x}}{x^3}$ の $x\to 0$ での極限値をロピタルの定理を用いて調べる。分母分子を微分してできる関数の極限を調べると $\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x^3)3x^2-e^{\sin x-x}(\cos x-1)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\left(f'(x^3)-\dfrac{e^{\sin x-x}}{3}\dfrac{\cos x-1}{x^2}\right)$ さらにロピタルの定理を用いて、$\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$ が成り立つ。よって、

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x^3)3x^2-e^{\sin x-x}(\cos x-1)}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

となる。ゆえに $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{x^3}-\dfrac{e^{\sin x}}{\sin(x^3)}\right)=\dfrac{1}{6}$ となる。

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos x-x(-\sin x)}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{3}$ であることにより、ロピタルの定理により、$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$ となる。

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x}=0$ であるから、ロピタルの定理から、不定形の極限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^2}$ は 0 となる。ロピタルの定理から不定形の極限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^3}$ も 0 となる。このように分母分子をそれぞれ微分し続けることで、不定形の極限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}}{x^7}$ も 0 となる。ゆえに、$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}}{x^7}=-\dfrac{1}{5040}$ となる。

宿題 4-2 略解

問題となる極限が存在するためには、この極限が不定形である必要がある。よって、分子に 0 を代入することで、$a_0=0$ であることがわかる。また、ロピタルの定理を使って、

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x+e^x\cos x-(a_1+2a_2x)}{3x^2}$$

となり、この極限が求められるので、この極限も不定形となる。よって、$1-a_1=0$ となる。さらに分母分子を微分して、$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)-2a_2}{6x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2e^x\cos x-2a_2}{6x}$ この極限が求

められることから、$a_2=1$ となる。よって、$a_0=0,\ a_1=a_2=1$ となる。

$\boxed{\text{宿題 4-3 略解}}$ $g(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2-\cdots-\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$ とおく。このとき、平均値の定理から、

$$\frac{g(x)-g(a)}{\frac{1}{n!}(x-a)^n}=\frac{g(x)}{\frac{1}{n!}(x-a)^n}=\frac{g'(c_1)}{\frac{1}{(n-1)!}(c_1-a)^{n-1}}$$

となる、x と a の間の実数が存在する。ここで $g'(x)=f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)-\dfrac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2-\cdots-\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}$ となる。さらに平均値の定理を用いて、

$$\frac{g'(c_1)}{\frac{1}{(n-1)!}(c_1-a)^{n-1}}=\frac{g''(c_2)}{\frac{1}{(n-2)!}(c_2-a)^{n-2}}$$

となる実数 c_2 が c_1 と a の間に存在する。これを繰り返すことで、$1<k\leq n-1$ において

$$\frac{g(x)}{\frac{1}{n!}(x-a)^n}=\frac{g^{(k)}(c_k)}{\frac{1}{(n-k)!}(c_k-a)^{n-k}}$$

となる実数 c_k が c_{k-1} と a の間に存在する。このとき、$g^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a)-f^{(k+1)}(a)(x-a)-\dfrac{f^{(k+2)}(a)}{2!}(x-a)^2-\cdots-\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-k-1)!}(x-a)^{n-k-1}$ となる。よって、

$$\frac{g(x)}{\frac{1}{n!}(x-a)^n}=\frac{g^{(n-1)}(c_{n-1})}{c_{n-1}-a}=\frac{f^{(n-1)}(c_{n-1})-f^{(n-1)}(a)}{c_{n-1}-a}=f^{(n)}(c_n)$$

$c_n=c$ とおくことで、$g(x)=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ より、

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

が成り立つ。