微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

宿題解答編

宿題 5-1 略解 $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ を用いて、

$$(\mathrm{Arcsin}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n$$

であり、

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n(-1)^nn!}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

ゆえに、$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$ となる。この式を項別に積分をし、$\mathrm{Arcsin}\,0=0$ であることから、

$$\mathrm{Arcsin}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

となる。

宿題 5-2 略解

(1) $\sin x$ の漸近展開 $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$, $(\sin x)^2=(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))^2=x^2-2\cdot\frac{x^4}{6}+o(x^4)=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$, $(\sin x)^3=x^3+o(x^4)$, $(\sin x)^4=x^4+o(x^4)$ と $n\geq5$ に対して $(\sin x)^n=o(x^4)$ を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\sin x}&=1+\sin x+(\sin x)^2+(\sin x)^3+(\sin x)^4+o(x^4)\\&=1+(x-\frac{x^3}{6})+(x^2-\frac{x^4}{3})+x^3+x^4+o(x^4)\\&=1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

(2) $\frac{x}{\sin x}$ を漸近展開をすると、

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin x}&=\frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}x^5+o(x^5)}\\&=\frac{1}{1-(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+o(x^4))}\\&=1+(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+o(x^4))+(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+o(x^4))^2+o(x^4)\\&=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+o(x^4)\end{aligned}$$

また、$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+o(x^4)$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin x\sqrt{1+x^2}}&=\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+o(x^4)\right)\\&=1-\frac{x^2}{3}+\frac{14}{45}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

となる。

漸近展開をするときに、(多項式)+$o(x^4)$ の形にせずに、分数の形にしているものが多かったです。また、$\dfrac{x}{\sin x}$ を展開するときに、5 次まで展開をしておかないと、最終的に 4 次まで求められないので、そのことを間違えている答案がありました。

$\boxed{\text{宿題 5-3 略解}}$ $\tan x$ の漸近展開を求めると、

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + (\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

であることから、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x\tan x}\right) &= \frac{\tan x - \sin x}{x\sin x\tan x} = \frac{(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{x(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3))} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x(x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4))} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(x^2)} \to \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{宿題 5-4 略解}}$

$\sin 3x = 3x - \dfrac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \dfrac{9x^3}{2} + o(x^3)$ であり、

$a\sin^3 x + b\sin x = a(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3))^3 + b(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)) = bx + (a - \dfrac{b}{6})x^3 + o(x^3)$ よって、この右辺を比べることで、$b = 3,\ a = -4$ となる。

特定の値を代入しても求められるのですが、漸近展開を用いて求める問題の意図でしたので、そのような解答には △ がついています。