微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

宿題解答編

宿題 6-1 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}$ は次の関数の冪級数展開 $\log(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ において $x=\dfrac{1}{2}$ をいれたものであるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\log\left(1+\frac{1}{2}\right)=\log\frac{3}{2}$$

(2) $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ であり、$e^{-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$ であり、$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ となる。よって、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ は、この冪級数に $x=1$ を代入したものである。ゆえに、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{e^1-e^{-1}}{2}=\sinh(1)$$

となる。

(以下コメント) $\sin\sqrt{-1}$ を使った解答をしている人がいましたが、間違っていることもないのですが、実数上の実数値関数を入れることを前提としていたので、今回は 0 を付けました。ちなみに、$\sin x$ を複素数領域にまで自然に拡張することは、$\sin x$ をこのような冪級数表示をすることで得られて、一般に、z を複素数として、

$$\sin z=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

とすることで得られます。特に、$\sqrt{-1}$ の値は、

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{-1})^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n\sqrt{-1}}{(2n+1)!}=\sqrt{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=\sqrt{-1}\sinh 1$$

となります。このように拡張して関数を考えるのは関数論の講義でできちんと扱います。ちなみに、

$$\cos x+\sqrt{-1}\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\sqrt{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{-1}x)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{-1}x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=e^{\sqrt{-1}x}$$

となります。これにより、$\sqrt{-1}=i$ とおくと、有名なオイラーの等式

$$\cos\theta+i\cdot\sin\theta=e^{i\theta}$$

宿題 6-2

(1) $x^2=t$ とおくと、$dt=2xdx$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}x^5dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}t^2dt=\frac{1}{2}\left([-e^{-t}t^2]_0^1+\int_0^1 2te^{-t}tdt\right)\\ &= \frac{-e}{2}+\left([-e^{-t}t]_0^1+\int_0^1 e^{-t}dt\right)\\ &= -\frac{3e^{-1}}{2}+[-e^{-t}]_0^1=1-\frac{5}{2e}\end{aligned}$$

(2) $2\cos^2\dfrac{x}{2}=1+\cos x$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\cos x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx=\sqrt{2}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{6}-0)=\sqrt{2}\end{aligned}$$

(3) $t=\mathrm{Arcsin}\,x$ とおくと、$dt=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ であるから、

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}tdt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{32}$$

$\boxed{\text{宿題 6-3}}$

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とおくと、$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ であり、その剰余項は、$R_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n=\dfrac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}x^n$

(2) $|x|<\dfrac{1}{2}$ と仮定する。$x>0$ とすると、$0<|c|<|x|$ であるから、$\left|\dfrac{1}{1+c}\right|\leq\dfrac{1}{1-|c|}<\dfrac{1}{1-|x|}$ であり、仮定から $\dfrac{|x|}{1-|x|}<1$ であるから、$|R_n(x)|\leq\dfrac{|x|^n}{(1-|x|)^{n+1}}\leq\dfrac{1}{1-|x|}\left(\dfrac{|x|}{1-|x|}\right)^n\to 0$ である。結果的に、$|x|<\dfrac{1}{2}$ において、$\mathrm{Arctan}\,x$ の剰余項 $R_n(x)$ は収束する。

(3) (2) から、$|x|<\dfrac{1}{2}$ において $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ であるから、$(\mathrm{Arctan}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

(4) (3) の冪級数展開の項別積分と $\mathrm{Arctan}\,0=0$ であることから、

$$\mathrm{Arctan}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(以下コメント)(2) ですが、$x=0$ の近くでいつでも等式が成り立つことを問う問題でした。なので、$|x|<\epsilon$ において $n\to\infty$ のときに収束することを示すことになります。一つ一つの x について収束を示せば良いことになります。なので、問題は c の処理となります。c は x にも n にも依存する 0 から x の間の実数です。なんとか c を不等式で押さえこんで x と n だけの関数 $S_n(x)$ を用いて $|R_n(x)|\leq S_n(x)\to 0$ を示せばよいことになります。実際、不等式をもう少しがんばれば、$|x|<1$ において等式 $\dfrac{1}{x+1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ が成り立つことも分かりますが、そもそもこのイコールは無限等比級数の和の公式を使えれば分かるものでした。