$\boxed{\text{微積分演習S}}$ [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

宿題解答編

$\boxed{\text{宿題 8-1}}$ 広義積分 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ が収束する為には $\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx$ が収束する必要があるが、$\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{x}dx=[\log x]_{\epsilon}^{1}=-\log\epsilon$ となるがこれは $\epsilon\to+0$ において収束しない。よって広義積分 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ も収束しない。

$\boxed{\text{宿題 8-2}}$

(1) $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+1)^n}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^n}dx=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)(x^2+1)^{n-1}}=\frac{-1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$

(2) 部分積分を使って、
$\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}dx=\int x\frac{x}{(x^2+1)^{n+1}}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx=x\frac{-1}{2n(x^2+1)^n}-\int\frac{-1}{2n(x^2+1)^n}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx$ となる。よって、$\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx=\frac{2n-1}{2n}\int\frac{1}{(x^2+1)^n}dx+\frac{x}{2n(x^2+1)^n}$

(3) 上記の不定積分に区間 $[0,1]$ で積分することで、$\displaystyle M_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}M_n+\left[\frac{x}{2n(x^2+1)^n}\right]_0^1=\frac{2n-1}{2n}M_n+\frac{1}{2^{n+1}n}$

(4) $\displaystyle M_1=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\mathrm{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4}$ であり、$\displaystyle M_3=\frac{3}{4}M_2+\frac{1}{16}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}$

$\boxed{\text{宿題 8-3}}$

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ である。$[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が恒等的に 0 となる関数でなければ、$\int_a^b f(x)dx>0$ が成り立つ。

($\because$ もし $f(x)$ が $[a,b]$ が恒等的に 0 でなければ、$c\in[a,b]$ が存在して $f(c)>0$ が成り立つ。$f(x)$ が連続であることから、c のある近傍 $[c-\epsilon,c+\epsilon]\cap[a,b]=A$ が存在して任意の $x\in A$ において $f(x)>0$ が成り立つ。A は閉区間でありその長さを δ とし、$\min\{f(x)|x\in A\}$ を m とおくと条件から $m>0$ である。$\int_a^b f(x)dx\geq\int_A f(x)dx\geq m\delta>0$ となり、$\int_a^b f(x)dx>0$ がわかる。)

上記のことから、$n\geq 1$ として $I_n-I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x(1-\sin x)dx>0$ が成り立つ。ここで $\sin^n x(1-\sin x)$ が $[0,\frac{\pi}{2}]$ において恒等的に 0 ではない連続関数であることを用いた。よって、$I_n>I_{n+1}$ であり、特に $n=1$ のとき、$1>I_2$ が成り立つ。よって、$1>I_n>I_{n+1}$ が任意の $n>1$ を満たす整数 n について成り立つ。

(2) (1) を用いて $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}<\frac{I_{2n}}{I_{2n}}=1$ であり、漸化式 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ を用いて $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}>\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}=\frac{2n+1}{2n+2}\frac{I_{2n}}{I_{2n}}=1-\frac{1}{2n+2}$ より、

$$1-\frac{1}{2n+2}<\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}<1$$

となり、$1-\frac{1}{2n+2}\to 1$ であることから、挟み撃ちの原理により、$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\to 1$ となる。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(I_{2n+1})^2=\lim_{n\to\infty}nI_{2n+1}I_{2n}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\lim_{n\to\infty}nI_{2n+1}I_{2n}$ となる。ここで $I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ かつ $I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$ であったから $nI_{2n+1}I_{2n}=\frac{\pi n}{2(2n+1)}\to\frac{\pi}{4}$ $(n\to\infty)$ となる。特に、$I_{2n+1}\to 0$ $(n\to$

∞) がわかる。

(4) (3) から $\sqrt{n}I_{2n+1} \to \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ であるから、$\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \dfrac{(2^n n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \dfrac{((2n)!!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \dfrac{(2n)!!}{\sqrt{n}(2n-1)!!} = \dfrac{2n+1}{\sqrt{n}}I_{2n+1} = 2\sqrt{n}I_{2n+1} + \dfrac{I_{2n+1}}{\sqrt{n}} \to \sqrt{\pi} \quad (n \to \infty)$ となる。