微積分演習S

[FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

宿題解答編

$\boxed{\text{宿題 9-1}}$ $0 < x < \dfrac{1}{2}$ の時、$\left|\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\right| \le \left|\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right| \le \sqrt{2}$ よって、$\left|\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\right| \le \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$ となり、$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}dx$ は収束するから $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ は収束する。同様に $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ も収束する。

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$ であり、$2x-1=t$ とすると、積分は

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_0^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mathrm{Arcsin}\,(1) - \mathrm{Arcsin}\,(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$$

$\boxed{\text{宿題 9-2}}$

(1) $0 < \alpha < 1$ のとき、

$$\lim_{x\to+0} \frac{(\log\sin x)'}{(\frac{1}{x^\alpha})'} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{\tan x}}{-\alpha\frac{1}{x^{\alpha+1}}} = -\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+0}\frac{x}{\tan x}\cdot x^\alpha = 0$$

であるから、ロピタルの定理により、

$$\lim_{x\to+0} |x^\alpha \log\sin x| = \lim_{x\to+0} \frac{|\log\sin x|}{\frac{1}{x^\alpha}} = 0$$

となる。よって、十分小さい実数 C に対して、$0 < x < C$ となる任意の x に対して、$|\log\sin x| < \dfrac{1}{x^\alpha}$ が成り立つ。よって、$\displaystyle\int_0^C \frac{1}{x^\alpha}dx$ は収束するので、優関数法により、$\displaystyle\int_0^C \log\sin x dx$ は収束し、従って $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx$ は収束する。

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin(\pi-x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \log\sin x(-dx) = A$

また、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \log\sin x(-dx) = A$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin x dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin x dx\right) = A$ となる。一方、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2\sin x\cos x)dx = \frac{\pi}{2}\log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x dx = 2A + \frac{\pi}{2}\log 2$$

故に、$A = -\dfrac{\pi}{2}\log 2$ となる。

$\boxed{\text{宿題 9-3}}$

(1) $x = 1-e^{-t}$ とおくと、$-t = \log(1-x)$ であるから、$-dt = \dfrac{-1}{1-x}dx = -e^t dx$ であるから、

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}dt = \int_0^\infty \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \int_0^1 \frac{-\log(1-x)}{x}dx = -\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}dx$$

(2) $\log(1-x)$ を級数展開すると、$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ であるから、$\frac{\log(1-x)}{x}$ の級数展開は $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-x^n}{n+1}$ となる。

(3) (2) を使って、

$$-\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

となる。