微積分演習S

[FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

ガイダンス（'23 年 5 月 29 日)

- 宿題 $\times 10+$期末試験
- 宿題の締め切りは同じ週の金曜日の 17:00
- 提出先は manaba 又はレポート Box
- 返却は次の授業時間 (の予定)
- slido について … 質問受付のための SNS
  event code # 1744435
  URL:`https://app.sli.do/event/4TgZpgAn7S6x5QEFHEGchk`
- 教科書や参考書は特に指定しないが、シラバスに書いてあるものでも良い。
  (参考文献) 微分積分の演習 (三宅俊恒著) 培風館
- 演習には宿題以外にも主体的に取り組むこと。

第 1 回（'23 年 5 月 29 日)

数列のおよび関数の極限値を求められるようになること。ここでは $\epsilon-N$ 論法を用いず、数列の収束の証明を議論する方法について学ぶ。$\epsilon-N$ 論法や $\epsilon-\delta$ 論法については数学リテラシー 2 で学ぶ。

§1 数列の極限

定義. 数列 a_n が n を限りなく大きくしたとき、a_n が限りなく α に近づいたとき、a_n は α に収束するといい、$a_n\to\alpha(n\to\infty)$ もしくは $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ と書く。

この定義は、高校生の時に習った定義であり、大学では本来なら $\epsilon-N$ 論法を用いた定義を学ぶ必要がある。

定理. 数列 a_n と b_n が α,β に収束し、c は任意の実数とする。以下が成り立つ。
(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$　(2) $\lim_{n\to\infty}(ca_n)=c\alpha$　(3) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$
(4) $\beta\neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=\alpha/\beta$　(5) $a_n\leq b_n$ ならば、$\alpha\leq\beta$ が成り立つ。

定理. 数列 a_n,b_n,c_n が、$a_n\leq c_n\leq b_n$ を満たし、$a_n,b_n\to\alpha$ のとき、数列 c_n も収束し $c_n\to\alpha$ を満たす。

この定理を一般に**挟みうちの原理**という。

定理. 上に (下に) 有界な単調増加 (減少) 数列はある実数に収束する。

この性質を実数の連続性ということもある。数列 $\dfrac{a_n}{b_n}$ の極限が、$\dfrac{\infty}{\infty}$ や $\dfrac{0}{0}$、$0\cdot\infty$ などとなるとき、その極限は不定形といい、数列を上手く取り替えることで、この極限が求められることがある。

$\boxed{\text{例題 1-1}}$

$n \to \infty$ のとき次の数列の極限を求めよ。ただし $a > 1$ とする。

(1) $\dfrac{5n^2-1}{2n^2+n}$　(2) $\dfrac{\sqrt{1+2n^2}}{2n+1}$　(3) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$　(4) $\sqrt[n]{a}$

$\boxed{\text{問題 1-1}}$

次の数列の極限を求めよ。$0 < a < 1$ とする。

(1) $\dfrac{n^2+1}{2^n}$　(2) $\dfrac{n^3}{3^n}$　(3) $\sqrt[n]{a}$

$\boxed{\text{問題 1-2}}$

次のように定義される数列の極限を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n+2}{a_n+1}$　(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$

$\boxed{\text{問題 1-3}}$

数列 a_n, b_n が α, β に収束し、全ての n に対して $a_n < b_n$ が成り立つとき、$\alpha < \beta$ も成り立つか？もし成り立たなければ、その反例を挙げよ。

§2 ネイピア数

定義. 数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は収束し、その値を自然対数の底もしくはネイピア数といい、e とかく。

$\boxed{\text{例題 2-2}}$

上記の数列 a_n は単調増加であることを示せ。

$\boxed{\text{例題 2-3}}$

(1) 上記の数列 a_n に対して $a_n < 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ が成り立つことを示せ。

例題 2-4

ネイピア数を定義する上の数列 a_n は全ての n に対して、$a_n < 3$ であることを示せ。

問題 2-4

以下の極限を求めよ。ただし $a, b, c > 0$ とする。

(1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ (2) $\dfrac{n!}{5^n}$ (3) $\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$

問題 2-5

以下の極限を求めよ。

(1) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ (2) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$ (3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ (4) $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n}$

問題 2-6

$a_n < 1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$ から $a_n < 3$ の証明と同様の方法で、さらに精度上げることで全ての n に対して $a_n < \dfrac{11}{4}$ が成り立つことを示せ。

問題 2-7

数列 a_n を漸化式 $a_1 = \sqrt{2}$ かつ $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ で与えられる数列とする．このとき、

(1) この数列が収束することを、実数の連続性の公理を用いて示せ。

(2) a_n の極限値を求めよ。

§3 関数の極限

定義. $\displaystyle\lim_{x\to a+} f(x)$ を右極限、$\displaystyle\lim_{x\to -a} f(x)$ の左極限という。$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to -a} f(x) = A$ の時、極限が存在するといい、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$ と書く。この A のことを関数 $f(x)$ の $x \to a$ での極限という。

関数 $f(x)$ と $g(x)$ において、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)$ の値が両方 0 もしくは ∞ のとき、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ は不定形の極限といい、関数を上手く操作することで、極限が求められることがある。

定理. $\displaystyle\lim_{x\to +a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき以下が成り立つ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ (2) c を実数とすると $\displaystyle\lim_{x\to a} cf(x) = cA$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$ (4) $B \neq 0$ なら $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

(5) $x \neq a$ において $f(x) \leq g(x)$ ならば $A \leq B$

定理. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

$\boxed{\text{例題 3-5}}$

次の極限を求めよ。ただし $\alpha\neq 0$ とする。

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x$ $\qquad$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$ $\qquad$ (3) $\lim_{t\to\infty}e^{-t}t$

$\boxed{\text{問題 3-8}}$

次の極限を求めよ。ただし $\alpha\neq 0$ とする。

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$ $\qquad$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}$ $\qquad$ (3) $\lim_{x\to 0}x^x$

宿題 1-1

以下の数列の極限値を求めよ。

(1) $a_n=\sqrt{5n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

(2) $a_n=\frac{2^n}{n!}$

宿題 1-2

実数の数列 a_n, b_n が $0<a_1<b_1$ と、$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ と $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 任意の n に対して $a_n<b_n$ を満たすことを示せ。

(2) a_n は単調増加かつ b_n は単調減少であることを示せ。

(3) a_n, b_n は同じ実数 α に収束することを示せ。

宿題 1-3

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}x^{\sqrt{x}}$$