微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

- slido ⋯ event code # 1744435
  URL:https://app.sli.do/event/4TgZpgAn7S6x5QEFHEGchk
- 演習には宿題以外にも主体的に取り組むこと。

第10回 ('23年7月31日)

概要

- ガンマ関数・ベータ関数の値が求められるようになること。
- これまでの学習内容を復習すること。

§22 ガンマ関数 (Γ 関数)

$x > 0$ において、ガンマ関数 $\Gamma(x)$ を広義積分を用いて

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

として定義する。このとき、以下の公式が成り立つ。

(1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0)$　　(2) $\Gamma(1) = 1$　　(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

例題 22-1

ガンマ関数が広義積分として絶対収束することを示せ。

- $t \to \infty$ において、広義積分の収束を証明する。$x+1 < N$ となる自然数をとる。$|e^{-t}t^{x+1}| < t^N e^{-t}$ である。また、ロピタルの定理から $\frac{t^N}{e^t} \to 0 \quad (t \to \infty)$ であるから e^{-t} は $t \to \infty$ において収束する。よって、ある実数 M に対して任意の $t > M$ に対して、$t^N e^{-t} < 1$ であるから、つまり、$|e^{-t}t^{x+1}| < 1$ である。よって、$t > M$ において $|e^{-t}t^{x-1}| < \frac{1}{t^2}$ かつ $\int_M^\infty \frac{1}{t^2}dt$ は収束するので、優関数法により広義積分 $\int_M^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ も収束する。
- $t \to 0$ において広義積分の収束を証明する。$0 < x < 1$ とすると、$|e^{-t}t^{x-1}t^{1-x}| = e^{-t} < 1$ であるので、$|e^{-t}t^{x-1}| < \frac{1}{t^{1-x}}$ がなりたつ。$\frac{1}{t^{1-x}}$ は広義積分可能なので、$e^{-x}t^{x-1}$ も広義積分可能。

問題 22-1

次の値を求めよ。ただし n は正の整数とする。

(1) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$　　(2) $\Gamma(5)$　　(3) $\Gamma(n+1)$　　(4) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$

問題 22-2

Γ 関数が $x > 0$ において連続であることから $\lim_{x \to +0} \Gamma(x)$ を求めよ。

$\boxed{\text{問題 22-3}}$
上の Γ 関数の性質 (1) を使うことで、負の数にも、負の整数にも関数を拡張することができる。以下の値を求めよ。
(1) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$　　(2) $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$

$\boxed{\text{問題 22-4}}$
$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ の値をガンマ関数を用いて求めよ。

§23　ベータ関数

$p, q > 0$ となる実数のとき、ベータ関数を

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

と定義する。ベータ関数は、$B(p,q) > 0$ かつ $B(p,q) = B(q,p)$ かつ $B(p,q+1) = \dfrac{q}{p}B(p+1,q)$ が成り立つ。また、

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

が成り立つ。(証明は広義重積分 (微積分 II) を用いて行う。)
$\boxed{\text{例題 23-2}}$
以下を示せ。

(1) $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a\theta\cos^b\theta d\theta = B(p,q)$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a\theta\cos^b\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

$\boxed{\text{問題 23-5}}$
上記の関係式を用いて次を示せ。

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$\boxed{\text{問題 23-6}}$
次の積分をガンマ関数を用いて表せ。ただし a は任意の正の数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3dx}{1+x^5}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^5}}$　　(5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}}$　　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a xdx$　　(8) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{5}}dx$

問題 23-7

a, b を、以下の積分が収束する任意の実数とするとき、この積分をガンマ関数を用いて表せ。具体的な値が求められる場合は求めよ。

$$\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^{b-1} \, dx$$

宿題 10-1

次の積分をガンマ関数を用いて表せ。その際、上のガンマ関数やベータ関数の性質を用いても構わない。

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5 \, dx}{\sqrt{1-x^4}}$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta} d\theta$

宿題 10-2

(1) 下の積分をガンマ関数を用いて表せ。ただし、a, b は広義積分が収束するような任意の実数とする。

$$\int_0^{\infty} \frac{x^b}{(1+x)^{a+3}} dx$$

(2) 以下を証明せよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a \theta \cos^b \theta d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

微積分 I 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 15 回（'17 年 8 月 2 日：Keywords ⋯ 定期テスト）

問題 24-1

以下の問題に答えよ。

(a) 等式 $\sin(\mathrm{Arccos}\,(x)) = 2x$ を満たす x を求めよ。 (10 点)

(b) 実数 a, b が $\mathrm{Arcsin}\,(a) + \mathrm{Arcsin}\,(b) = \mathrm{Arcsin}\,(1)$ を満たすとする。このとき、a, b は関係式 $a^2 + b^2 = 1$ を満たすことを示せ。 (15 点)

問題 24-2

$f(x) = \mathrm{Artanh}\,(x)$ とおき、この関数は $\tanh(x)$ の逆関数のこととする。以下の問題に答えよ。

(a) $f(x)$ の微分を求めよ。 (10 点)

(b) $f(x)$ のマクローリン展開の n 次の項を求めよ。 (20 点)

問題 24-3

次の不定積分および定積分を実行せよ。

(a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x+\sqrt{x-1}}dx$ (15 点)　(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}dx$ (15 点)

問題 24-4

次の極限を求めよ。

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + \log(x+1)}{\mathrm{Arcsin}\,x - x}$$

(15 点)
