微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

解答編

問題 1-2 漸化式と $a_1 > 0$ を使うことで、帰納的に $a_n > 0$ が言える。

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n^2 + 2a_n + 2}{a_n + 1}$$

となり、任意の n について $-a_n^2 + 2a_n + 2 > 0$ を示す。x_0 を $x^2 - 2x - 2 = 0$ の解で、$x_0 > 1$ であるものとする。このとき、$x_0 < 3$ であり、

$$a_{n+1} - x_0 = \frac{3a_n + 2}{a_n + 1} - x_0 = \frac{(3 - x_0)a_n - x_0 + 2}{a_n + 1} = \frac{(3 - x_0)(a_n - x_0)}{a_n + 1}$$

となる。よって、$a_1 - x_0 = 1 - x_0 < 0$ であり、ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n - x_0 < 0$ なら $a_{n+1} - x_0 < 0$ が成り立つ。よって数学的帰納法から、任意の自然数 n に対して $a_n - x_0 < 0$ がわかる。よって、$0 < a_n < x_0$ であるから、$-a_n^2 + 2a_n + 2 > 0$ がわかる。これは $a_{n+1} - a_n > 0$ と同値なので、a_n は単調増加となる。また、$a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{a_n + 1} < 3$ であったから、a_n は上に有界。よって、実数の連続性公理から数列 a_n はある実数に収束する。 □

補足
途中で証明した $a_n < x$ を用いて上に有界としても構いません。

問題 2-2

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!n^i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \\
&< 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right) \\
&< 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right) = a_{n+1}
\end{aligned}$$

問題 2-3

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!n^i} \\
&< 1 + 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!} < 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3
\end{aligned}$$