微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

- slido ⋯ event code # 1744435
  URL:https://app.sli.do/event/4TgZpgAn7S6x5QEFHEGchk
- 演習には宿題以外にも主体的に取り組むこと。

第 2 回（'23 年 6 月 5 日)

関数の極限続き

問題 3-9

以下の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

今日やること

連続関数についての理解を深めること。また、微分について理解すること。

§4 連続関数の性質

定義. $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ が成り立つとき、関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

定理. 関数 $y=f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ において連続とする。このとき、$f(a)\neq f(b)$ がならば、$f(a)$ と $f(b)$ の中間の実数 y に対して、$f(c)=y$ となる実数 $a<c<b$ が存在する。この定理を**中間値の定理**という。

定理. $y=f(x)$, $y=g(x)$ が $x=a$ で連続関数とする。c を実数とする。このとき、以下の関数が $x=a$ で連続となる。

(1) $f(x)\pm g(x)$ (2) $cf(x)$ (3) $f(x)g(x)$

(4) $g(x)\neq 0$ となる x において $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

定理. 関数 $y=f(x)$ と $x=g(z)$ に対して、その合成してできる関数 $y=f(g(z))$ のことを $f\circ g$ と書く。もし、f,g がそれぞれ連続であれば、$f(x),g(z)$ は連続である。

定理. $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとき、$a_n\to\alpha(n\to\infty)$ となる数列に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\alpha)$ となる。

定理. a_n が有界な単調増加であるとする。その収束先を α とすると、$\alpha=\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ である。

§4.1 初等関数

多項式関数・指数関数・三角関数・対数関数や、それらの関数の和などのよく知られた関数を初等関数という。これらの関数は連続関数の例である。

例題 4-1

多項式による関数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ や多項式関数 $f(x),g(x)$ の商となる関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を有理関数という。多項式函数や有理関数は連続関数である。

指数関数

$\alpha > 0$ となる実数とする。指数関数 $y = \alpha^x$ を定義する。実数 α に対して、n が正の整数のとき、α^n を $\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha$ として定義する。n が負の整数の場合 $\alpha^n = \dfrac{1}{\alpha^{-n}}$ とする。また、α が正の実数の場合、実数 $\alpha^{\frac{1}{n}}$ を α の n 乗根として定義する。

問

$\alpha^{\sqrt{2}}$ はどうやって定義するのか？高校までに習った指数関数の存在を仮定せずに以下の問題を解け。

$\boxed{\text{問題 4-1}}$

$\alpha > 0$ の場合に指数関数 $y = \alpha^x$ を以下のように定義する。問題に答えよ。

(1) 正の実数 x, y と任意の自然数に対して以下が成り立つことを示せ。

$$x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$$

(2) 任意の正の実数 y と整数 n に対して、$y = x^n$ となる実数 x はただ一つ存在することを示せ。y に対してこのような x のことを $y^{\frac{1}{n}}$ と表す。

(3) $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ かつ $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ を示せ。

(4) a を正の実数とする。このとき、有理数 $r \in \mathbb{Q}$ に対して、関数 $y = a^r$ が定義できることを示せ。

(5) 正の実数 α に対して、r, r' を任意の有理数とする。このとき以下が成り立つことを示せ。
$\alpha > 1$ ならば

$$r < r' \Leftrightarrow \alpha^r < \alpha^{r'}$$

$\alpha < 1$ ならば

$$r < r' \Leftrightarrow \alpha^r > \alpha^{r'}$$

つまり、有理数 r 上の関数において $\alpha > 1$ なら関数 $y = \alpha^r$ は単調増加、$0 < \alpha < 1$ なら $y = \alpha^x$ は単調減少である。

(6) 実数の連続性公理を用いて、正の実数 α に対して、$y = \alpha^x$ が定義できることを示せ。

(7) α^x は単調増加な連続関数であることを示せ。

$\boxed{\text{問題 4-2}}$

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

とする。関数 $y = f(x)$ は連続であることを示せ。

$\boxed{\text{問題 4-3}}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

とする。関数 $y = f(x)$ は連続ではないことを示せ。

§4.2　三角関数の逆関数

定義. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数をそれぞれ $\mathrm{Arcsin}\, x$, $\mathrm{Arccos}\, x$, $\mathrm{Arctan}\, x$ とする。ただし、定義域、値域は以下のようになる。

関数	定義域	値域
$y = \mathrm{Arcsin}\, x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \mathrm{Arccos}\, x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \mathrm{Arctan}\, x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

例題 4-2

次を解け。

(a) 次の値を求めよ。

(1) $\mathrm{Arcsin}\, \frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\mathrm{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　(3) $\mathrm{Arctan}\, \frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) 次の方程式を解け。

(1) $\mathrm{Arcsin}\, x = \mathrm{Arctan}\, \sqrt{5}$　(2) $\mathrm{Arctan}\, x = \mathrm{Arccos}\, 2x$

問題 4-4

次の等式を満たす x を求めよ。

(1) $\mathrm{Arcsin}\, x = \mathrm{Arcsin}\, \frac{5}{13} + \mathrm{Arcsin}\, \frac{4}{5}$

(2) $\mathrm{Arcsin}\, x = \mathrm{Arccos}\, \frac{1}{3} + \mathrm{Arccos}\, \frac{7}{9}$

§5　微分の定義

定義. 関数 $f(x)$ の $x = a$ での微分 (もしくは微分係数) とは、

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

の $x \to a$ での極限として定義され、その極限が存在する場合、$f(x)$ は $x = a$ で微分可能という。

いくつかの計算方法

積・商の微分法

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

合成関数の微分法

$$f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

逆関数の微分法

$y = f(x)$ に対して、$x = g(y)$ を満たす関数 $g(x)$ が一意に決まるとき、$y = g(x)$ を関数 $y = f(x)$ の逆関数という。このとき、以下の式が成り立つ。

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{df}{dy}(f(y))}$$

§5.1　いくつかの微分の公式 (三角関数・指数関数・逆三角関数・双曲線関数・逆双曲線関数)

- 三角・指数関数の微分

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	e^x
微分	$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{(\cos x)^2}$	e^x

- 双曲線関数の微分

	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$
微分	$\cosh x$	$\sinh x$	$\dfrac{1}{(\cosh x)^2}$

- 逆三角関数の微分

	Arcsin x	Arccos x	Arctan x
微分	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

- 逆双曲線関数の微分

	$\mathrm{Arsinh}\, x$	$\mathrm{Arcosh}\, x$	$\mathrm{Artanh}\, x$
微分	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

例題 5-3

以下の関数の微分を逆関数の微分法、合成関数の微分法などを用いて計算せよ。
(1)　$\mathrm{Arcsin}\, x$　　(2)　$\log \sin x$　　(3)　$\mathrm{Arctan}\, x$

宿題 2-1

(1)　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x}$$

(2)　等式 $\mathrm{Artanh}\, x = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+x}{1-x}$ を示せ。

(3)　$(\mathrm{Artanh}\, x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ を計算せよ。

(4)　関数 $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ を微分せよ。

宿題 2-2

$\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

を満たすとする。このとき、以下の問題に答えよ。

(1) ある実数 c が存在して、任意の整数 n に対して $f(n) = nc$ が成り立つことを示せ。

(2) 任意の有理数 r に対して、$f(r) = rc$ であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で連続ならば、$f(x) = cx$ であることを示せ。
(Hint : 連続関数ならば、収束する任意の数列 a_n に対して $f(a_n)$ が $f(\alpha)$ に収束することを用いよ。)