微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

有理数の稠密性 $x, y \in \mathbb{R}$ を任意にとる。このとき、ある有理数 r が存在して $x < r < y$ を満たす。
(証明)
$y - x = \epsilon$ とする。このとき、アルキメデスの原理により、$\frac{1}{\epsilon} < n$ となる自然数 n が存在する。今、$A = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$ とおき、$A \cap (x, y) = \emptyset$ と仮定する。ここで、(x, y) は開区間である。$A \cap (-\infty, x] \neq \emptyset$ かつ $A \cap [y, \infty) \neq \emptyset$ であり、それらは、それぞれ上に有界かつ、下に有界である。$A \cap (-\infty, x]$ の最大を p とし $A \cap [y, \infty)$ の最小を q とすると、仮定から区間 (p, q) には A の元が含まれないので、$q = p + \frac{1}{n}$ であり、$[x, y] \subset (p, q)$ であるので、$q - p = \frac{1}{n} > \epsilon = y - x$ かつ $\epsilon > \frac{1}{n}$ であるので矛盾する。よって、$A \cap (x, y) \neq \emptyset$ となるので、ある有理数 $\frac{m}{n} \in A$ が $x < \frac{m}{n} < y$ を満たす。

解答編

問題 4-1 (1) n を自然数とする。$x < y$ ならば、$y = x + h$ とおくと、$h > 0$ であり、

$$y^n = (x + h)^n = x^n + \sum_{i=1}^{n} {}_nC_i x^{n-i} h^i > x^n$$

逆に、$y^n - x^n > 0$ とすると、$(y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}) > 0$ より、$x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} > 0$ であるから、$x > y$ が成り立つ。

特に、$x_0^n - x_1^n = 0$ ならば、$x_0 < x_1$ でも $x_1 < x_0$ でもないので、$x_0 = x_1$ が成り立ち、$y = x^n$ は $x > 0$ において単射な関数であることがわかる。

(2,3) $w > 1$ となる任意の実数をとる、(1) から $w^{n-1} > 1$ が成り立つ。さらに w を掛けることで、$w^n > w$ となる。よって、w^n は任意の実数 w よりも大きくすることができるので、$\lim_{w \to \infty} w^n = \infty$ となる。同様に、$w < 1$ のとき、(1) と w^{n-1} を両辺に掛けることで、$w^n < w$ が成り立つ。w^n は任意の $w < 1$ となる実数より小さくなるので、$\lim_{w \to 0} w^n = 0$ が成り立つ。ここで、任意の正の実数 y に対して、$y > 1$ なら、$1 < y < y^n$ となるので、中間値の定理から、$1 < x < y$ となる実数 x が存在して、$y = x^n$ となる。同様に、$y < 1$ のとき、$y^n < y < 1$ であるから、$y < x < 1$ なる実数 x が存在して、$y = x^n$ が成り立つ。$y = 1$ となるとき、明らかに $1^n = 1$ であるからこのときも $y = x^n$ となる x が存在する。

(1) に書いたように $y = x^n$ は $x > 0$ において単射なので、そのような x は一意的である。この x のことを $y^{\frac{1}{n}}$ と書き、y の n 乗根という。

この証明から、$y > 1$ ならば、$y^{\frac{1}{n}} > 1$ であり、$y < 1$ ならば、$y^{\frac{1}{n}} < 1$ が成り立つ。また、$\mathbb{R}_+$ を正の実数全体の集合とすると、写像 f を

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad f(x) = x^n$$

として定義すると、f は全単射であることがわかった。

(4) a を正の実数とする。このとき、有理数 $r \in \mathbb{Q}$ に対して、$r = \frac{m}{n}$ となる自然数 n と整数 m をとると、$y = a^r = (a^{\frac{1}{n}})^m$ と定義する。このとき、明らかに a^r は有理数における指数法則が成り立つことに注意しておく。また、$r > 0$ ならば、$a > 1$ なら $a^r > 1$ であり、$a < 1$ ならば、$a^r < 1$ であり、$r < 0$ ならば、$a > 1$ なら $a^r < 1$ であり、$a < 1$ ならば $a^r > 1$ であることに注意しておく。

(5) α を正の実数とする。$\alpha > 1$ とする。r, r' を任意の有理数とし、$r < r'$ ならば、$r' - r > 0$ であるから、(4) の最後に書いたことから、$\alpha^{r'} - \alpha^r = \alpha^r(\alpha^{r'-r} - 1) > 0$ が成り立つ。また、$\alpha < 1$ のとき、$r < r'$ とすると、同様に $\alpha^r - \alpha^{r'} = \alpha^r(1 - \alpha^{r'-r}) > 0$ が成り立つ。

特に、$\alpha > 1$ の場合、$\alpha^{\frac{1}{n}}$ は単調減少数列であり、$\alpha^{\frac{1}{n}} > 1$ であるので、連続性公理から収束値 $\beta(\geq 1)$ が存在する。$\beta > 1$ とすると、$\beta = 1+h$ であり、正の実数 h を用いて二項定理から $\beta^n = (1+h)^n \geq 1+nh$ となる。このとき、n を十分大きくすると、$1+nh > \alpha$ となり、$\alpha < \beta^n < \alpha$ であるから矛盾する。よって、$\beta = 1$ となる。従って $\lim_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 1$ となる。

(6) x を正の実数とする。$\{\alpha^r | r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ に上界が存在して、実数の連続性公理より、$\alpha^x = \sup\{\alpha^r | r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ として定義する。

(7) 無理数の集合を $\mathbb{P}$ とする。$x, y \in \mathbb{R}$ を正の数とし $x < y$ とする。$x, y \in \mathbb{Q}$ の場合、$\alpha^x < \alpha^y$ であることは上で述べた。$x \in \mathbb{Q}$ かつ $y \in \mathbb{P}$ であるとき、有理数の稠密性から、$x < r < y$ となる有理数 r が存在して、$\alpha^x < \alpha^r \leq \alpha^y$ が成り立つ。同様に、$x \in \mathbb{P}$ かつ $y \in \mathbb{Q}$ のとき、$x < r < y$ となる有理数が存在して、$\alpha^x \leq \alpha^r < \alpha^y$ が成り立つ。$x, y \in \mathbb{P}$ が成り立つとき、$x < r < s < y$ となる有理数 r, s が存在する。α^r は $\{\alpha^s | s \in \mathbb{Q}, s < x\}$ の上界であるから、$\alpha^x \leq \alpha^r$ であり、同様に $\alpha^s \leq \alpha^y$ が成り立つ。よって、$\alpha^x \leq \alpha^r < \alpha^s \leq \alpha^y$ が成り立つ。従って、関数 $y = \alpha^x$ は、$\mathbb{R}$ 上で単調増加関数であり

$$x < y \Rightarrow \alpha^x < \alpha^y$$

が成り立つ。

$y = \alpha^x$ の連続性を示す。実数 β を任意にとる。また、実数 $x_0 < x_1 < \beta$ をとる。このとき、有理数の稠密性から $s < x_0 < x_1 < r < \beta$ となる有理数 r, s が存在して、

$$\alpha^{x_1} - \alpha^{x_0} < \alpha^r - \alpha^s = \alpha^s(\alpha^{r-s} - 1) < \alpha^\beta(\alpha^{r-s} - 1)$$

となる。また、$\alpha^{\frac{1}{n}} \to 1$ であるから、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\alpha^{\frac{1}{n}} - 1 < \dfrac{\epsilon}{\alpha^\beta}$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する。ここで、上の不等式を満たすように、$r - s < \dfrac{1}{n}$ かつ、また十分小さく $\delta > 0$ をとって $x_1 - x_0 < \delta$ を満たすように、r, s, x_0, x_1 を取り直す。そのような x_0, x_1 に対して、

$$\alpha^{x_1} - \alpha^{x_0} < \alpha^\beta(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1) < \epsilon$$

となる。よって、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$x_1 - x_0 < \delta \Rightarrow \alpha^{x_1} - \alpha^{x_0} < \epsilon$ となるので、$y = \alpha^x$ は連続である。 □

$\boxed{\text{補足コメント}}$

最後の関数の連続性は数学リテラシー第 3,4 回の予定ですので、そちらで学んだあと定義を確認してください。また、実は、(7) の最後の証明は、関数の連続性の証明ではなく、$(-\infty, \beta)$ での一様連続性を示しています。しかし、一般に一様連続であれば、連続ですのでこれで十分です。

ここで、$\epsilon - \delta$ 論法による連続性の定義をここで改めてしておきます。

定義 (連続性)**.** $y = f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して、

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が成り立つ。

任意の $a \in A \subset \mathbb{R}$ に対して、$x = a$ で連続であるとき、$y = f(x)$ は A で連続である。

定義 (一様連続性)**.** $y = f(x)$ が $A \subset \mathbb{R}$ において一様連続であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して、

$$|x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon$$

が成り立つ。

これらについてはすぐに理解できないかもしれませんが、一年生のうちには理解できるようになっておくことが望ましい。