

# 微積分演習 S

[FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

- slido … event code # 1744435  
URL: <https://app.sli.do/event/4TgZpgAn7S6x5QEFHEGchk>
- 演習には宿題以外にも主体的に取り組むこと。



## 第3回 ('23年6月12日)

### 概要

高次導関数、合成関数の微分を求められるようになること。

### §6 高次導関数

以下、微分可能な関数  $f(x)$  に対してその導関数を与える作用素として  $\frac{d}{dx}$  を用いて導関数  $f'(x)$  を  $\frac{d}{dx}f(x)$  や  $\frac{df}{dx}(x)$  のように書くことがある。このように、微分を伴う作用素のことを微分作用素という。 $f^{(1)}(x)$  を導関数  $f'(x)$  として定義する。 $n$  を 1 より大きい自然数とする。このとき、 $f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}}{dx}(x)$  として定義することで、帰納的に  $f^{(n)}(x)$  を定義する。このとき、 $f^{(n)}(x)$  を  $n$  次導関数という。 $n$  次導関数を表す微分作用素を  $\frac{d^n}{dx^n}$  としておく。また、 $f^{(n)}(a)$  として  $x = a$  での  $f^{(n)}(x)$  の微分係数という。

#### 例題 6-1

次の関数の  $n$  次導関数を求めよ。

(1)  $y = \sin x$       (2)  $\frac{1}{x(x-1)}$

#### 問題 6-1

次の  $n$  次導関数を求めよ。

(1)  $\cos x$       (2)  $\log x$       (3)  $x^m$

#### 問題 6-2

次の  $n$  次導関数を求めよ。

(1)  $e^x \cos x$       (2)  $e^x \sin x$       (3)  $\frac{2x^2}{x^2-1}$       (4)  $\frac{4x-1}{x^2+x-2}$       (5)  $\frac{1}{(x^2+1)(x^2-1)}$

#### 問題 6-3

$f(x) = \frac{x}{e^x-1}$  とする。

- (1)  $f(0)$  を計算せよ。
- (2)  $f'(0), f''(0), f'''(0)$  を計算せよ。

#### 問題 6-4

$\alpha, c$  を任意の実数のとき、次の関数  $y = (x-c)^\alpha$  の  $n$  次導関数を求めよ。

**問題 6-5**

2つの関数の組  $(\cos x, \sin x)$  を考える。この2つの関数の両方に微分を作用させることを考える。つまり、 $\frac{d}{dx}(f(x), g(x)) = (f'(x), g'(x))$  のようにする。 $\frac{d^n}{dx^n}(\cos \theta, \sin \theta)$  はどのように表されるか。また、代わりに  $(e^x \cos x, e^x \sin x)$  とするとどうか。

**例題 6-2**

微分可能な関数  $f(x), g(x)$  に対して、 $\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x))$  は

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

と計算されることを示せ。

**問題 6-6**

次の関数の  $n$  次導関数を求めよ。

(1)  $y = x^2 e^x$       (2)  $x \log(1+x)$

**§7 合成関数の微分法**

$f(x)$  と  $g(x)$  を微分可能な関数とする。このとき、 $h(x) = f(g(x))$  の  $x$  での微分は  $f'(g(x))g'(x)$  と計算される。 $f(x)$  に対して  $(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$  であるから、 $f'(x) = f(x)(\log f(x))'$  となる。直接  $f(x)$  を微分するのではなく、 $\log$  を取ってから微分をする方が良い場合にこの方法を用いる。これを対数微分法という。

**例題 7-3**

次の関数の微分をせよ。

(1)  $\log \sin x$       (2)  $\log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

**問題 7-7**

次の関数を微分せよ。

(1)  $e^{e^{e^x}}$       (2)  $\log \log \log x$       (3)  $x^{e^x}$

**宿題 3-1**

次の関数  $\sqrt{1+x}$  の  $n$  次導関数を求めよ。ただし、必要であれば  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n)$  や  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$  を用いてもよい。

**宿題 3-2**

$a > 0$  とする。 $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{Arcsin} \frac{x}{a}$  とおくとき、 $f\left(\frac{a}{2}\right), f'\left(\frac{a}{2}\right), f''\left(\frac{a}{2}\right)$  を求めよ。

**宿題 3-3**

次の関数の微分を対数微分法を用いて求めよ。

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2(x-1)}$$