微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

- slido ⋯ event code # 1744435
  URL:https://app.sli.do/event/4TgZpgAn7S6x5QEFHEGchk
- 演習には宿題以外にも主体的に取り組むこと。

第4回（'23年6月19日)

概要

平均値の定理とロピタルの定理を使えるようにすること。

§8 ロピタルの定理

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ もしくは $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ とする．もし、$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が極限値をもつとする．このとき、$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ も極限値をもち、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．

(例) ロピタルの定理をを使うと

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^2\sinh x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{2x\sinh x + x^2\cosh x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\cos^3 x - 1}{2x\sinh x + x^2\cosh x}$$

となり、ここでさらにロピタルの定理を用いると、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x - 1}{(x^2\sinh x)''} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{2\sinh x + 4x\cosh x + x^2\sinh x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{(x^2+2)\sinh x + 4x\cosh x}$$

となり、さらに、

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x^2\sinh x)'''} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6\cosh x + 6x\sinh x + x^2\cosh x} = \frac{1}{6}$$

となるので、

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^2\sinh x} = -\frac{1}{2}$ となる。

例題 8-1

以下の不定形の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$

問題 8-1

ロピタルの定理を用いて次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin(x)} - \frac{x^2}{1-\cos(x)}\right)$　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{2x + x^2 - 2x\sin(x)}{x}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x - x}{x^3}$ (4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\tan x - x^2}{\sin^4 x}$ (5) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$

(6) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+\sin x}+\frac{x}{x-\cos x}\right)$ (7) $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\tan(x)^{-2}}$ (8) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x}{x^2+x^3+x^4}$

問題 8-2

以下の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x^2+2x}\right)^{x^2}$

§9 平均値の定理

定理 (平均値の定理 1). 関数 $y=f(x)$ が (a,b) で微分可能で、$[a,b]$ で連続であるとき、以下を満たす $c\in(a,b)$ が存在する。

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c)$$

a を x とし、b を a とするとき、$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$ とかける。

定理 (平均値の定理 2). 関数 $y=f(x),g(x)$ が (a,b) で微分可能で、$[a,b]$ で連続であるとき、以下を満たす $c\in(a,b)$ が存在する。

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

例題 9-2

次の関数 $y=f(x)$ について、平均値の定理を適用させ、$f(x)$ を実数 c を用いて表せ。

(1) x^n (2) $y=e^x$ (3) $y=\sin x$

問題 9-3

$f(x)$ が次の関数のとき、平均値の定理を適用させて得られる c を x,a の関数として表せ。

(1) $x^n\ (x>0)$ (2) $y=e^x$ (3) $y=\sin x\ (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$

問題 9-4

$f(x)$ を 2 回微分可能関数とする。$g(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ とおくとき、$f(x)$ を $g(x)$ とし、$g(x)$ を $\frac{1}{2}(x-a)^2$ とし、2 つ目の平均値の定理を適用させることで、

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

となる $c\in(a,b)$ が存在することを示せ。

例題 9-3

a, b を $a < b$ となる実数とする。平均値の定理を用いて以下の不等式を証明せよ。

$$e^b - e^a - e^a(b-a) > 0$$

$$e^b(b-a) - e^b + e^a > 0$$

問題 9-5

a, b を $0 < a < b$ となる実数とする。このとき任意の自然数 n に対して以下の不等式を示せ。

$$(na^{n-1} - b^{n-1})b < (n-1)a^n$$

$$(nb^{n-1} - a^{n-1})a < (n-1)b^n$$

以下、答えだけでなく、導出過程も分かるように記すこと。

宿題 4-1

ロピタルの定理を使って次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x}{x^3} - \frac{e^{\sin(x)}}{\sin(x^3)} \right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}}{x^7}$

宿題 4-2

以下の極限が存在するように定数 a_0, a_1, a_2 を求めよ。また、そのときの極限も求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)}{x^3}$$

宿題 4-3

$f(x)$ を n 回微分可能関数とする。このとき、$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \cdots - \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$ として、上の平均値の定理のどちらかを応用させることで、上の問題 9.4 の一般化として $f(x)$ の値をある実数 $c \in (a, b)$ での n 回微分係数を用いた式で与えよ。