微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

- slido ⋯ event code # 1744435
  URL:https://app.sli.do/event/4TgZpgAn7S6x5QEFHEGchk
- 演習には宿題以外にも主体的に取り組むこと。

第 5 回（'23 年 6 月 26 日)

概要

テイラーの定理及び、漸近展開の計算ができるようにすること。
演習には主体的に取り組むこと。

§10　テイラー展開

定義.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

となる式変形を有限テイラー展開という。また、$a = 0$ としてこの式を考えたもの、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$$

を有限マクローリン展開という。

例題 10-1

次の関数を 3 次まで有限マクローリン展開をせよ。

(1)　$\cos x$　　(2)　$\dfrac{1}{1+x}$

問題 10-1

次の関数を 3 次までの有限マクローリン展開をせよ。

(1)　$\log(1+x)$　　(2)　$e^x \sin x$　　(3)　$e^{\sin x}$

§11　漸近展開とランダウの記号

定義. n を 0 以上の整数とする。関数 $f(x), g(x)$ について $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ であるとき

$$f(x) = o(g(x))$$

のように書き表す。この記号をランダウの記号という。

ランダウの記号 o の意味は、$f(x)$ が $g(x)$ に比べて、$x=a$ において 0 に行くスピードが速いということである。

$g(x)=(x-a)^n$ の時、$0\leq i<n$ のとき $g^{(i)}(a)=0$ なので、極限の存在性とロピタルの定理から、$f^{(i)}(a)=0$ が成り立つ。$n=0$ の場合 $f(x)=o(1)$ となるが、これは、$\lim_{x\to a}f(x)=0$ であることを意味し、$f(x)$ の極限の性質になる。$f(a)=0$ なら、$f(x)$ の連続性を意味する。

ランダウの記号

$g(x)=(x-a)^n$ とするとき、$f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ であるとき、移項をして $f_1(x)=f_2(x)+o((x-a)^2)$ と書くことで、関数 $f_1(x)$ が $(x-a)^n$ の精度で $f_2(x)$ と一致することを意味する。

以下次の公式を記しておく。c は実数定数である。

(1) $o(x^n)o(x^m)=o(x^{n+m})$ (2) $f(x)=o(x^n)$ ならば、$f(x)o(x^m)=o(x^{n+m})$

(3) $c\cdot o(x^n)=o(x^n)$ (4) $n\leq m$ ならば $o(x^n)+o(x^m)=o(x^n)$

$$f_1(x)=f_2(x)+o((x-a)^n)$$

基本的な関数について漸近展開をすると

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$$

$$(1+x)^\alpha=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)\quad(\alpha\in\mathbb{R})$$

のようになる。

例題 11-2

次の関数を 3 次までの漸近展開を求めよ。

(1) $\sin x$ (2) $\cos x$ (3) $\dfrac{1}{1+x}$

(4) $\dfrac{1}{1-x}$ (5) $\log(1+x)$ (6) $\dfrac{x^2+1}{x^1+x+1}$

問題 11-2

以下を適当な精度で漸近展開せよ。

(1) $\{2+x+o(x)\}\{1+2x+x^2+o(x^2)\}$ (2) $e^x(\sin x+\tan x)$

(3) $\sqrt{1+ax+bx^2}$ (4) $\log(1+ax+bx^2)$

問題 11-3

以下の関数を $x=0$ において 5 次まで漸近展開せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\log(1+x)}-1}$ (2) $\dfrac{e^{\sin x}-x}{\sqrt{1+x^2}}$

(3) $\sin x \log(1+x)$

(4) $\log\cos x$

(5) $\tan x$

(6) $\sqrt{1+x}$

$\boxed{\text{問題 11-4}}$

以下を適当な精度で $x=0$ において漸近展開せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+x^3+o(x^3)}}$

(2) $\sin x(2-3x-x^2+o(x^3))$

(3) $\sin(\tan x + x^4)$

(4) $\log(1+\log(1+\log(1+x))))$

(5) $\sqrt{1+x+x^2+x^3+o(x^3)}$

(6) $(1-\cos x)\sin x - \tan^2 x$

$\boxed{\text{問題 11-5}}$

以下の関数を $x=0$ において n 次の項まで漸近展開せよ。

(1) $\log(1+x)$

(2) $\dfrac{1}{1-x^2}$

§12 漸近展開を用いた不定形の極限

$$f(x) = a_0x^k + a_1x^{k+1} + a_2x^{k+2} + \cdots + a_nx^{k+n} + o(x^{k+n})$$
$$g(x) = b_0x^k + b_1x^{k+1} + b_2x^{k+2} + \cdots + b_nx^{k+n} + o(x^{k+n})$$

と漸近展開され、$b_0 \neq 0$ である場合、

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$$

と計算される。

$\boxed{\text{例題 12-3}}$

次の不定形の極限を漸近展開を使って計算せよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\log(1+x)}{\cos x - 1}$$

$\boxed{\text{問題 12-6}}$

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos x - \cos 2x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\tan x - \log(1+x^2)}{1-\sqrt{1+x^4}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x(e^{\sin x} - 1 - \tan x)}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\sin 3x}{x(\tan x - 1)}$

宿題 5-1

関数 $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ を $x = 0$ における漸近展開を n 次の項まで計算せよ。

宿題 5-2

次の関数を $x = 0$ において漸近展開を 4 次まで計算し、ランダウの記号 $o(x^4)$ を使って表せ。

(1) $\dfrac{1}{1 - \sin x}$

(2) $\dfrac{x}{\sin x\sqrt{1 + x^2}}$

(この関数を直接に高階微分するのではなく、ランダウの記号を用いた効率の良い計算を行うこと。)

宿題 5-3

極限

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x \tan x}\right)$$

を求めよ。

宿題 5-4

定期試験中、$\sin x$ の 3 倍角の公式について $\sin 3x = a \sin^3 x + b \sin x$ までは覚えているが、係数 a, b についてどうしても思い出せないとする。このとき、たまたま覚えていた $\sin x$ の 3 次までの漸近展開を用いて、この a, b を簡単に導き出してみよ。