微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

- slido ⋯ event code # 1744435
  URL:https://app.sli.do/event/4TgZpgAn7S6x5QEFHEGchk
- 演習には宿題以外にも主体的に取り組むこと。

第6回（'23年7月3日)

概要

積分の計算ができるようにすること。

§13　べき級数展開

関数 $f(x)$ がテイラー展開の剰余項 $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ が定義域 $D\subset\mathbb{R}$ において $n\to\infty$ の時収束するとき、$f(x)$ は $D\subset\mathbb{R}$ において解析関数であるという。そのとき、関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

のように級数として表示することができる。例えば、指数関数や三角関数は、剰余項が収束し、

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ただし、$\tan x$ はこのような奇麗な表示ではなく、ベルヌイ数を用いた表示となる。

$$\tan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^nB_{2n}(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}$$

この式は覚える必要はない。ただし、$|x|<\dfrac{\pi}{2}$ であり、B_n は

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

となる係数とする。歴史的にはベルヌイより先に関孝和がこの数に到達しており、本来ならば関数と呼ぶべきものだが、、これでは function を表す関数特別がつかないので、ここではベルヌイにも敬意を表して関・ベルヌイ数ということにする。

例題 13-1

$f(x)=e^x$ のとき、剰余項を x と実数 c を用いて表しそれが、$n\to\infty$ のとき0に収束することを示せ。

問題 13-1

上の例題と同じことが $f(x)=\sin x$ や $\cos x$ の場合も成り立つことを示せ。

$\boxed{\text{問題 13-2}}$
次の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$

$\boxed{\text{問題 13-3}}$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}$ はどのような関数の冪 (べき) 級数展開であるだろうか？

$\boxed{\text{問題 13-4}}$
関・ベルヌイ数 B_n は上記のべき級数の係数を用いて定義されているとする。このとき、B_1 を求め、n を $n \geq 3$ となる奇数とすると $B_n = 0$ であることを示せ。

§14 リーマン積分

$a < b$ として、閉区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ が $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ に対して、$[t_{i-1}, t_i]$ での $f(x)$ の最大値を M_i とし、最小値を m_i とする。このとき、$\overline{S}(f, \Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$ とし、$\underline{S}(f, \Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(t_{i+1} - t_i)$ とおくとき、

$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta)$$

が成り立つ。$|\Delta| = \max\{t_i - t_{i-1} | i = 1, \cdots, n\}$ とする。このとき $|\Delta| \to 0$ となる任意の分割の列に対して、ダルブーの定理により $\underline{S}(f, \Delta)$ と $\overline{S}(f, \Delta)$ は収束し、$\overline{S}(f, \Delta) \to \overline{S}(f)$ を上積分といい、$\underline{S}(f, \Delta) \to \underline{S}(f)$ として、それを下積分という。このとき、

$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \underline{S}(f) \leq \overline{S}(f) \leq \overline{S}(f, \Delta)$$

が成り立つ。$\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ であるとき、$f(x)$ はリーマン積分可能といい、それを $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ とかく。

$\boxed{\text{問題 14-5}}$
リーマン積分可能でない関数とはどのようなものがあるか？

§15 部分積分・置換積分

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

を部分積分といい、$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ に対して

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = [F(g(x))]_a^b$$

を置換積分という。

$\boxed{\text{例題 15-2}}$

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \cos x) \sin x dx$ の値を求めよ。

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} x dx$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{問題 15-6}}$

次の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\log x}dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\log\sqrt{3}}^{\log\sqrt{3}} \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx$

§16 三角関数の積分

三角関数は以下のように積分される

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

次の計算をせよ。(高校の範囲)

$\boxed{\text{問題 16-7}}$

次の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$ (2) $\displaystyle\int \sin x \cos x dx$ (3) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

(4) $\displaystyle\int \tan x dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2 x}dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ (9) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$\boxed{\text{問題 16-8}}$

次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\cos x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx$

$\boxed{\text{問題 16-9}}$

次の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

宿題 6-1

次の無限和をべき級数を用いて計算せよ。その際、どのようなべき級数を用いたのかを分かるようにせよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

宿題 6-2

次の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}x^5dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\cos x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

宿題 6-3

$\tan x$ のべき級数展開は複雑であるが、$\mathrm{Arctan}\,x$ のべき級数展開を剰余項の収束を確かめることによって以下のように簡単に求めることができる。以下を実行せよ。

(1) $\dfrac{1}{1+x}$ のマクローリン展開の剰余項 $R_n(x)$ を §10 のテイラー展開の c を使って表せ。

(2) x が十分 0 に近いとき、$n\to\infty$ のとき $R_n(x)$ が 0 に収束することを示せ。(2 点、他は全て 1 点)

(3) $(\mathrm{Arctan}\,x)'$ の冪級数展開を求めよ。

(4) 項別積分をすることにより $\mathrm{Arctan}\,x$ の冪級数展開を求めよ。