微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

- slido ⋯ event code # 1744435
  URL:https://app.sli.do/event/4TgZpgAn7S6x5QEFHEGchk
- 演習には宿題以外にも主体的に取り組むこと。

第 7 回 （'23 年 7 月 10 日)

概要

有理関数、三角関数、無理関数の積分の計算ができるようになること。

§17　有理関数の積分

§17.1　有理関数

$f(x), g(x)$ が多項式として、$f(x)/g(x)$ となる関数を有理関数という。以下、係数は全て実数であり、因数分解も全て実数の範囲で行う。有理関数は下記のような割り算をすることで、$g(x)$ より小さい次数の多項式 $h(x)$ を使って

$$f(x) = q(x)g(x) + h(x)$$

と書くことができる．ここで $q(x)$ は商となる多項式である．ゆえに積分計算の問題は $h(x)/g(x)$ の部分に帰着される．

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{h(x)}{g(x)}$$

以下、$\dfrac{h(x)}{g(x)}$ の積分を考える。

問題 17-1

次の不定積分計算を実行せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}dx$

§17.2　(A)　$h(x) =$(定数)、$g(x) =$(2 次式) の場合．]

[(A-1) $g(x) = (x-a)(x-b)$ の場合 $(a \neq b)$]

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)$$

と部分分数展開されることを用いて、

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right) dx = \frac{1}{a-b}\left(\log \frac{x-a}{x-b}\right) + C$$

と積分される．

例題 17-1

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+3)}dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx$

$\boxed{\text{問題 17-2}}$

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3x-4}dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+12x+20}dx$

[(A-2) (A-1) で $a=b$ となる場合]

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a} + C$$

$\boxed{\text{問題 17-3}}$

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^2}dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{2x^2+2x+1}dx$

[(A-3) $g(x)$ が実数係数 1 次式に分解できない場合.]

この $g(x)$ を平行移動させて、$1/(y^2+a^2)$ の形に持っていくことができる.（ここで a は実数.）このとき、$y=az$ と置換することで、以下のようになる。

$$\int \frac{dy}{y^2+a^2} = \int \frac{adz}{a^2(z^2+1)} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{z^2+1} = \frac{1}{a}(\mathrm{Arctan}\, z) + C = \frac{1}{a}\left(\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{a}\right) + C$$

$\boxed{\text{問題 17-4}}$

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+1}dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2}dx$

§17.3　[(B)　$h(x)$ =(1 次式)、$g(x)$ =(2 次式) の場合.]

$$\begin{aligned}\int \frac{px+q}{x^2+ex+f}\,dx &= \int \left(\frac{p}{2}\frac{2x+e}{x^2+ex+f} + \frac{r}{x^2+ex+f}\right)dx \qquad \left(r = q - \frac{pe}{2}\right)\\ &= \frac{p}{2}\log(x^2+ex+f) + r\int \frac{dx}{x^2+ex+f} + C\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 17-5}}$

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x-1}dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+3}dx$

§17.4　[(C)　$g(x)$ =(3 次式以上) の場合.]

$g(x)$ を因数分解することで 2 次多項式と 1 次多項式に分解できる。それら $h(x)/g(x)$ を部分分数展開をすることで、上のどれかに帰着される.

§17.5　三角関数の積分

$\sin x$ と $\cos x$ の有理関数となる積分は、$\sin x$ もしくは $\cos x$ を t とおいて有理関数の積分に帰着できる場合がある。もしくは $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおいておくと三角関数の有理関数は全て t の有理関数に帰着する。

問題 17-6

$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とするとき、以下を t もしくは dt の式で表せ。

(1) $\sin x$　(2) $\cos x$　(3) $\tan x$　(4) dx

問題 17-7

次の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2+\sin x}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}dx$

§18　無理関数の積分

$F(x,y)$ を x,y に関する有理関数とする。

$F\left(x,\sqrt{(1\text{次式})}\right)$ の積分 $\cdots$ $t=\sqrt{a+bx}$ とおく。このとき、$dx=\dfrac{2t}{b}dt$ であるから、有理関数の積分

$$\int F\left(x,\sqrt{a+bx}\right)dx = \int F\left(\frac{t^2-a}{b},t\right)\frac{2t}{b}dt$$

に帰着する。

$F\left(x,\sqrt{(2\text{次式})}\right)$ の積分 $\cdots$

- 変数変換により、積分 $\int F\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)dx$、$\int F\left(x,\sqrt{1+x^2}\right)dx$、$\int F\left(x,\sqrt{x^2-1}\right)dx$ に帰着される。それぞれの積分は $x=\sin t$、$\sinh t$、$\cosh t$ とおいても良いが、他にも、それぞれ $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}$、$x=\dfrac{2t}{1-t^2}$、$t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ とおいてやる流儀もある。
- 変数変換せずにやる場合、
  (1) ax^2+bx+c が実数解 α,β を持つなら、$\int F\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ は、$t=\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ として変換しても、有理関数の積分に帰着される。
  (2) ax^2+bx+c が虚数解を持ち、$a>0$ なら、$\int F\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ は、$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ として変換しても、有理関数の積分に帰着される。
- $$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\operatorname{Arcsin}x+C,\quad \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\operatorname{Arsinh}x+C$$
  も適宜使うことができる。

例題 18-2

次の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}dx$　(2) $\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}dx$　(3) $\displaystyle\int\sqrt{x^2-1}dx$

問題 18-8

次の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x+2}}\sqrt{}dx$ (2) $\displaystyle\int \sqrt{x+x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$

問題 18-9

次の定積分を実行せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+\sqrt{1+x^2})dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$ (6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{2+\sqrt{1-x^2}}$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (8) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ (9) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

(10) $\displaystyle\int_0^2 \frac{xdx}{x+\sqrt{1+x^2}}$ (11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)dx}{\sqrt{1+x}}$ (12) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

(13) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (14) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ (15) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$

(16) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x-\sqrt{1+x}}}$ (17) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x+\sqrt{1-x}}}$

宿題 7-1

(1) 次の計算をせよ。

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx$$

(2) $\tan\dfrac{x}{2} = t$ と置くことにより、

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$$

を求めよ

宿題 7-2

以下の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{2x^2+2x+1}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

宿題 7-3

次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_5^7 \frac{1}{x+4\sqrt{x-4}}dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^0 \sqrt{1+x+x^2}dx$