微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

- slido ⋯ event code # 1744435
  URL:https://app.sli.do/event/4TgZpgAn7S6x5QEFHEGchk
- 演習には宿題以外にも主体的に取り組むこと。

第8回（'23年7月19日)

概要

広義積分の計算ができるようになること。

§19　漸化式と積分

例題 19-1

n を自然数とする。$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ とおくとき、以下の問題に答えよ。

(1) I_n の漸化式を求めよ。

(2) J_n の漸化式を求めよ。

(3) I_3, I_4, I_5 を求めよ。

(4) J_3, J_4, J_5 を求めよ。

問題 19-1

次の等式を示せ。

(1)　$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$

次の計算をせよ。

(2)　$\int_0^{\pi} e^{ax}\cos bx\,dx$　　(3)　$\int_0^{\pi} e^{ax}\sin bx\,dx$

問題 19-2

n を自然数とする。$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x dx$, $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x dx$ とおくとき、以下の問題に答えよ。

(1) K_n の漸化式を求めよ。

(2) L_n の漸化式を求めよ。

(3) K_3, K_4, K_5 を求めよ。

(4) L_3, L_4, L_5 を求めよ。

§20　広義積分

広義積分とは、無限区間の積分や、(半) 開区間上の定積分のことである．広義積分が発散することもあり、収束するかどうかをまず判定する必要がある．計算方法は、積分計算と極限操作の合成により行える．例えば、$f(x)$ が $[0,\infty)$ 上で定義できたとして、$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とし、b において $f(x)$ が定義できないとする。このとき、$[a,b)$ 上の積分は.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b}[F(x)]_a^c$$

として計算する。この積分が収束しないとき、広義積分は発散するという。

例題 20-2

次の広義積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

問題 20-3

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ は発散することを示せ。

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ は発散することを示せ。

問題 20-4

次の広義積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$

問題 20-5

以下の定積分は収束するか？もし収束するならその値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$

例題 20-3

a,b を実数として、次の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$

問題 20-6

n を自然数とし、$\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ を求めよ。

宿題 8-1

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ は発散するが、$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$ はどうか？またその理由を記せ。

宿題 8-2

$M_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ とおく。以下の問題に答えよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^n}dx$ を求めよ。

(2) 式変形 $\displaystyle\frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}} = x\frac{x}{(x^2+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$ と部分積分法を用いて、不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx$ を x のある関数と不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$ を用いて表せ。

(3) M_{n+1} を M_n を用いて表せ。

(4) 上の漸化式を用いて M_3 を計算せよ。

宿題 8-3

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とおく。以下の問題をとけ。

(1) $1 > I_n > I_{n+1}$ であることを示せ。

(2) $I_{2n+1}/I_{2n} \to 1$ であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(I_{2n+1})^2$ を求めよ。

(4) これを利用して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}$ を求めよ。