微積分演習 S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

- slido ⋯ event code # 1744435
  URL:https://app.sli.do/event/4TgZpgAn7S6x5QEFHEGchk
- 演習には宿題以外にも主体的に取り組むこと。

第 9 回 ('23 年 7 月 24 日)

概要

広義積分の収束について議論できるようになること。

§21　広義積分の収束

広義積分が収束する (広義積分可能) とは $\lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx$ の極限が存在することである．

§21.1　優関数法

収束

$f(x), g(x)$ が区間 $[a,b)$ 上の関数であり、$|f(x)| \leq g(x)$ を満たし、$\int_a^b g(x)dx$ が広義積分として収束するとき、$\int_a^b f(x)dx$ も収束する．

(注意) **絶対値をつけることを忘れない。** $\int_a^b |f(x)|dx$ が収束するとき、この広義積分は**絶対収束する**という．

絶対収束しなくても広義積分が収束することはある。

発散

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b)$ 上の関数であり、次の (i), (ii) を満たす関数 $g(x)$ が存在するとき、広義積分は発散する。

(i) $0 \leq g(x) \leq f(x)$,　(ii) $\int_a^b g(x)dx$ は発散する。

§21.2　広義積分の収束発散条件

$f(x), g(x)$ が区間 $[a,b)$ 上の関数であり $f(x) > 0$ かつ $g(x) > 0$ を満たすとする。$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0, \infty$ であるとする。このとき、

$$\int_a^b f(x)dx \text{ が収束する} \iff \int_a^b g(x)dx \text{ が収束する}$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ が発散する} \iff \int_a^b g(x)dx \text{ が発散する}$$

この条件を用いることで次のことがわかる。関数 $f(x)$ が区間 $[a,b)$ 上定義されており、$\lim_{x\to b-0}(x-b)^\alpha f(x)$ がある有限の値に収束するとする。このとき、広義積分

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (*)$$

の収束発散については以下のようになる。

もし $f(x)$ は $b<\infty$ であるとき、

$$\text{広義積分 } (*) \text{ は} \begin{cases} \text{収束する} & 0<\alpha<1 \\ \text{発散} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

もし $b=\infty$ であるとき、

$$\text{広義積分 } (*) \text{ は} \begin{cases} \text{収束する} & \alpha > 1 \\ \text{発散する} & 0<\alpha\leq 1 \end{cases}$$

となる。

問題 21-1

次の広義積分が収束するかどうか判定せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x}}$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{x}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx$ (5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2}dx$ (6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^4}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ (8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}dx$ (9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1-\cos x)dx$

(10) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}dx$

問題 21-2

以下の定積分が収束するかどうかを判定せよ。p を含む式の場合は、収束するための p の条件を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p-1}$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))^p}$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{x^2-1}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^\infty x^p e^{-x}dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^p}{x-\sin x}dx$ (6) $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-x^2}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^p+x^{2p}}}dx$ (8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p(1-x)^{1-p}}$ (9) $\displaystyle\int_1^\infty (\log x)^p dx$

(10) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x(x+1)(x+2))^p}$ (11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(\log x)^p}$ (12) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^p}{1-\cos x}dx$

(13) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1-e^x}dx$ (14) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2(x^3+1)^p}$ (15) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[p]{x^2+1}}dx$

§21.3　ガンマ関数

$x > 0$ において、ガンマ関数 $\Gamma(x)$ を

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

として定義する。

問題 21-3

ガンマ関数が $t = 0$ と $t = \infty$ において収束することを示せ。

問題 21-4

ガンマ関数の整数での値を求めよ。

宿題 9-1

次の広義積分が収束することを示し、その値を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

宿題 9-2

以下の定積分が収束するかどうか判定し、収束するなら以下の手順で積分を実行せよ。

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$$

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^\alpha \log \sin x$ が収束する α の範囲を考えることで、広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$ が収束することを示せ。

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin x dx$ と $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx$ を A を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x dx$ を計算することで、A を求めよ。

宿題 9-3

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ であることを用いて、広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1} dt$ の値も $\dfrac{\pi^2}{6}$ であることを示す。

(1) うまく置換積分を行うことで、等式 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1} dt = -\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx$ を示せ。

(2) $\dfrac{\log(1-x)}{x}$ を級数展開をせよ。

(3) この級数展開の項別積分ができると仮定することで、$\displaystyle -\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ であることを示せ。