微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

宿題 4-1(1) 補足

$\dfrac{\sin(x^3)}{x^3} \to 1 \quad (x \to 0)$ であることから、

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\frac{\sin(x^3)}{x^3}}-e^{\sin x}}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{\sin(x^3)}$$

と結論付けている人がまあまあいます。これは間違いです。極限を 2 段階に分けることができればそれも言えるかもしれませんが、これは微妙です。おそらく、

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)^{\frac{\sin(x^3)}{x^3}}-g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{h(x)}$$

としていいと思ってるのかもしれませんが、そういうわけではありません。確かに、

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin(x^3)-e^{\sin x}x^3}{x^3\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin(x^3)}\frac{e^x\sin(x^3)-e^{\sin x}x^3}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin(x^3)-e^{\sin x}x^3}{x^6}$$

はしていいのですが、これは、積の極限はそれぞれの極限の積になるからです。もちろん $\dfrac{\sin(x^3)}{x^3}$ と 1 は違う関数なので、この差が効いてくるような状況だと、入れ替えていいわけではありません。例えば、上と似た状況で、次の例を考えてみてください。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\frac{\sin(x^3)}{x^3}}-(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120})}{x^6}=-\frac{119}{720}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120})}{x^6}=\frac{1}{720}$$

さらに言えば、極限を 2 段階に分けられるのなら、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}(1+0)^n=1$$

も言えてしまいますが、これが成り立たないことは良く知っていると思います。