微積分演習S[FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第5回プリント補足編 (ランダウの記号)

ランダウの記号のイコール

$$f(x)=o(x^n), o(x^n)o(x^m)=o(x^{n+m})$$

はイコールではありますが、左辺から右辺には変形できますが、右から左に変形はできません。$o(x^n)$ の意味は、$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=0$ となる任意の関数を表しますが、$o(x^n)$ を具体的に $f(x)$ を当てはめることはできません。もしできたとすると、

$$x^3=o(x^2)=x^4$$

となって、関数として、x^3 と x^4 は一致しませんので関数のイコールとして意味がありません。

イコール $x^3=o(x^2)$ の意味としては x^3 という関数が $x=0$ の近くで x^2 より速いスピードで 0 に行くということを述べているのであって、関数の等式ではないということです。

$o(x^n)o(x^m)=o(x^{n+m})$ についてですが、$f(x)=o(x^n)$ かつ $g(x)=o(x^m)$ であれば、$\dfrac{f(x)g(x)}{x^{n+m}}=\dfrac{f(x)}{x^n}\dfrac{g(x)}{x^m}\to 0$ となりますが、一般に、$o(x^{n+m})$ なる関数が $o(x^n)$ と $o(x^m)$ の関数の積になるかというとそういうわけではありません。$x^{n+m+1}=o(x^{n+m})$ であって、$f(x)g(x)=x^{n+m+1}$ とし、$f(x)=a_0x^k+\cdots$ かつ $g(x)=b_0x^l+\cdots$ とします。ただし、$a_0b_0\neq 0$ とします。そうすると $x^{n+m}=1=(a_0x^k+\cdots)(b_0x^l+\cdots)$ となり、展開することで、$k+l=n+m+1$ であり、$\dfrac{f(x)}{x^n}\to 0$ であることから、$k>n$ であり、$\dfrac{g(x)}{x^m}\to 0$ であることから、$l>m$ となります。なので、$k+l\geq n+m+2$ となって矛盾します。

他にも、$o(x^4)=o(x^3)$ となることも同じであって、$f(x)=o(x^4)$ ならば、$\dfrac{f(x)}{x^4}\to 0$ であるなら、$\dfrac{f(x)}{x^3}=\dfrac{f(x)}{x^4}x\to 0$ であるから、$o(x^4)$ は $o(x^3)$ に置き換えていいのですが、$o(x^4)$ を $o(x^3)$ に置き換えることはできません。

漸近展開された関数の商の漸近展開

関数 $f(x)$ が $f(x)=ax+bx^2+cx^3+o(x^3)$ となっているとき、$\dfrac{f(x)}{x}$ は $x=0$ で極限値 a をもつことがわかり、$\dfrac{f(x)}{x}=a+bx+c^2+o(x^2)$ となることがわかります。(これは宿題 5-2(2) のヒントにもなっています。) ただし、関数 $\dfrac{f(x)}{x}$ は $x\neq 0$ では $\dfrac{f(x)}{x}$ であって、$x=0$ で 0 とする関数とします。なので、例えば $\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{x^2}{6}+o(x^2)$ という漸近展開が成り立ちます。