担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第6回プリント補足編 (剰余項の収束)

例題 13-1 e^x をマクローリン展開をすると、$x \in \mathbb{R}$ とし、$0 < c < x$ もしくは $x > c > 0$ となる実数 c を用いて、

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n$$

と表すことができる。ここで、$R_n(x) = \dfrac{e^c}{n!}x^n$ となる。このとき、$x > 0$ として、$x \leq N$ かつ $3N < n$ となる自然数を N と n をとり、N を固定する。

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^x}{n!}x^n < e^N\frac{N^n}{n!} < e^N\frac{N^N}{(2N)!}\frac{N^{n-N}}{(2N+1)^{n-N}} < \frac{e^N N^N}{(2N)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

よって挟み撃ちの原理から $R_n(x) \to 0$ が成り立つ。

$x < 0$ の場合、$x < c < 0$ となる実数を c と $|x| < N$ となる自然数 N(固定) をとり、n を上と同様とすると、

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^c}{n!}|x|^n < \frac{N^n}{n!} < \frac{N^N}{(2N)!}\frac{N^{n-N}}{(2N+1)^{n-N}} < \frac{N^N}{(2N)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

どちらにしても、$R_n(x) \to 0$ が成り立つ。

任意の実数 x に対して $x \neq 0$ なら $R_n(x) \to 0$ が成り立つ。ゆえに、e^x は全実数 x において剰余項が収束するから、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

のように冪級数展開できる。また、$x = 0$ の場合も冪級数展開は明らかに成り立つ。