微積分演習S [FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 9 回プリント補足編 (広義積分の収束)

問題 21-1 の解答

$$|x^{\frac{3}{2}}\frac{\log x}{x^2+1}| \le |x^{\frac{3}{2}}\frac{\log x}{x^2}| = |\frac{\log x}{\sqrt{x}}|$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

であるから、ロピタルの定理から

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

となる。よって、十分大きい $M > 1$ に対して、$\forall x > M$ に対して $\left|x^{\frac{3}{2}}\frac{\log x}{x^2+1}\right| \le 1$ となる。つまり、$|\frac{\log x}{x^2+1}| \le \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ であり、$\int_M^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{2}{\sqrt{M}} < \infty$ となるから、優級数法により、$\int_M^\infty \frac{\log x}{x^2+1}dx$ は収束する。よって $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2+1}dx$ も収束する。