微積分演習S

[FBA1722,FBA1732]

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

定期テスト解答編

問題 1

(1)

(a) $\lim_{x\to\infty}\log x^{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log x$ ここで、ロピタルの定理から $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ であるから $\log x$ の連続性から $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$ となる。

(b) 対数微分法を用いることで、$f'(x)=f(x)(\log f(x))'=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\log x}{x}\right)'=x^{\frac{1}{x}}\frac{\frac{1}{x}x-\log x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$ □

(2) $\int(1+\tan^2 x)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x$ より、

$$\int\tan^2 x dx=\tan x-\int dx=\tan x-x$$

□

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$
$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=-\frac{1}{2}$ □

問題 2

$\frac{1}{1-X}=1+X+X^2+o(X^2)$ であり、$o(\sin^2 x)=o(x^2)$ であり、$\sin x=x+o(x^2)$ であるから、

$$\frac{1}{1-\sin x}=1+\sin x+\sin^2 x+o(x^2)=1+x+o(x^2)+(x+o(x^2))^2+o(x^2)$$
$$=1+x+x^2+o(x^2)$$

2 次の係数は $\frac{f^{(2)}(0)}{2!}=1$ より、$f^{(2)}(0)=2$ となる。 □

問題 3

$\sqrt{1-4x}$ を漸近展開をすると、$\sqrt{1-4x}=1+\binom{\frac{1}{2}}{1}(-4x)+\binom{\frac{1}{2}}{2}(-4x)^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}(-4x)^3+o(x^3)=1-2x-2x^2-4x^3+o(x^3)$ より、

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\frac{1-(1-2x-2x^2-4x^3+o(x^2))}{2x}=\frac{2x+2x^2+4x^3+o(x^3)}{2x}=1+x+2x^2+o(x^2)$$

□

ちなみにこの関数の $x=0$ での級数展開の一般項を C_n、つまり $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$ とすると、C_n は全て自然数で、$\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$ と書けます。これは組み合わせ論で有名な数で、カタラン数と呼ばれています。

問題 4

$\sqrt{x-1}=t$ とおくと、$x=1+t^2$ であるから、$dx=2tdt$ より、

$$\int_5^{10}\frac{1}{x-2\sqrt{x-1}}dx=\int_2^3\frac{2tdt}{(t-1)^2}=\int_2^3\frac{2(t-1)+2}{(t-1)^2}dt=\left[2\log(t-1)-\frac{2}{t-1}\right]_2^3$$

$$=2\log 2-2\left(\frac{1}{2}-2\right)=1+\log 4$$

□

問題 5

$x\to\infty$ における収束性を考察する。$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ であるからロピタルの定理から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=0$ が成り立つ。よって、ある実数 C が存在して $x\geq C$ なら、$\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}<1$ となる。よって $x\geq C$ のとき、

$$\left|e^{-x}\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right|\leq e^{-x}$$

ここで、$\displaystyle\int_C^\infty e^{-x}dx$ は収束するので、優関数法により広義積分 $\displaystyle\int_C^\infty e^{-x}\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ も収束する。

一方、$x\to 0$ での広義積分の収束発散について考察する。$x=0$ において e^{-x} は定数なので、$\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ の収束を考えても同じことである。$x^{\frac{2}{3}}\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}=\dfrac{\log x}{x^{-\frac{1}{6}}}$ であり、

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\log x)'}{(x^{-\frac{1}{6}})'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}}=-6\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{6}}=0$$

より、ロピタルの定理により、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-\frac{1}{6}}}=0$$

である。十分小さい $\epsilon>0$ に対して $x<\epsilon$ において、$\left|x^{\frac{2}{3}}\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\right|<1$ であり、$\left|\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\right|<\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ かつ、$\displaystyle\int_0^\epsilon\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$ が収束することにより、優関数法により、$\displaystyle\int_0^\epsilon\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ は広義積分は収束し、よって、$\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ も収束する。

以上から、広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ は収束する。 □