

数学リテラシー 1

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第10回 ('25年5月20日)

演習問題

問題 1 [20 点]

(I) 以下 n は正の整数として、(1)~(3) に答えよ。

- (1) 命題「 n と $\frac{n(n+1)}{2}$ はともに 4 の倍数である。」の否定命題を作れ。
- (2) 命題「 $n^2 + 2$ は 3 の倍数ではない、または n は 8 以上である。」の否定命題を作れ。
- (3) (2) で答えた否定命題を満たすような n をすべて求めよ。

(II) 集合 A, B, C を次のように定める。

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{0, 2, 4\}, C = \{0, 3, 5\}$$

写像 $f: A \rightarrow B$ を次のように定める。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0 \text{ または } x = 3) \\ 2 & (x = 1 \text{ または } x = 4) \\ 4 & (x = 2 \text{ または } x = 5) \end{cases}$$

以下の (1)~(3) に答えよ。(答えのみで良い)

- (1) f が全射であるか否かと、単射であるか否かと、全単射であるか否かを答えよ。
- (2) A の f による像 $f(A)$ と、 B の f による像 $f(B)$ と、 C の f による像 $f(C)$ を、元を列記する表記法で答えよ。
- (3) $f(B \cap C) = f(B) \cap f(C)$ が成り立つか否かと、 $f(B \cup C) = f(B) \cup f(C)$ が成り立つか否かを答えよ。

問題 2 [20 点]

以下の (I) と (II) に答えよ。

(I) 次の行列 A, B, C, D に対して、以下の (1), (2) に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) AB, BC, CD, DA を計算せよ。
- (2) (1) で計算した行列の積の中で正則行列であるものに対して逆行列を求めよ。

(II) 次の線形写像 f, g は全単射かどうかを判定し、その理由を述べよ。さらに、全単射であるなら、その逆写像を求めよ。

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

問題 3 [20 点]

2 次正方行列 A による一次変換 $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ により、 xy 平面上の点 $(1, 0)$, $(0, 1)$ はそれぞれ $(2, 1)$, $(-1, 1)$ に移される。以下の (1)~(5) に答えよ。

- (1) 行列 A を求めよ。
- (2) xy 平面上の点 $(3, 5)$ が一次変換 $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ により移される点を求めよ。
- (3) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

2 次正方行列 B による一次変換 $f_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、一次変換 $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と x 座標を 2 倍し、 y 座標を 3 倍する一次変換 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の合成写像 $g \circ f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ とする。

- (4) 行列 B を求めよ。
- (5) 行列 B の行列式 $\det B$ を求めよ。

問題 4 [20 点]

以下の (1)~(4) に答えよ。

- (1) 行列 R が直交行列であるとは、 $R^{-1} = \boxed{\text{あ}}$ が成り立つことである。空欄 $\boxed{\text{あ}}$ に当てはまる式を答えよ。
- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。また、各固有値に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ。
- (3) (2) の行列 A を直交行列 R を用いて対角化せよ。その際、 R も示すこと。
- (4) (3) で求めた R について $R^{8000} = \underbrace{R \cdots R}_{8000}$ を求めよ。

問題 5 [20 点]

以下の (I), (II) に答えよ。

(I) 以下の問いに答えよ。ただし、 n は正の整数とする。

- (1) 命題「 n と $n(n+3)$ のどちらか一方は 4 の倍数である」の否定命題を作れ。
- (2) 命題「 $n^2 + 2n$ は 5 の倍数である、または、 n は 9 以上である」の否定命題を作れ。
- (3) (2) で答えた否定命題を満たすような n をすべて求めよ。

(II) 3 つの集合 A, B, C をそれぞれ次のように定める.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{1, 3, 6\}, C = \{1, 2, 4\}$$

写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を $f(n) = n^2 + 1$ で定める. 以下の問いに答えよ. (答えのみでよい.)

- (1) f が全射であるか否かと, 単射であるか否かと, 全単射であるか否かを答えよ.
- (2) B の f による像 $f(B)$ と, C の f による像 $f(C)$ と, $A \setminus B$ の f による像 $f(A \setminus B)$ を, 元を列記する表記法で答えよ.
- (3) $A \setminus f(C)$ と $f(B) \cap C$ を元を列記する表記法で答えよ.

問題 6 [20 点]

以下の (I), (II) に答えよ. (I) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ が与えられたとする. 次に行列 B の候補として, 6 つの行列

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, B_5 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

が与えられたとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $2A + B$ が定義されるものを $B_1, \dots, B_6$ からすべて選び, それぞれ計算せよ.
 - (2) AB が定義されるものを $B_1, \dots, B_6$ からすべて選び, それぞれ計算せよ.
 - (3) 行列 B_1 は正則か. 正則であれば, その逆行列を計算せよ. 正則でなければ 0 と記せ.
- (II) 写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy \\ 3x - 4y + z \end{pmatrix}$ が線形写像であるかどうか理由をつけて答えよ.

問題 7 [20 点]

2 次正方行列 B による一次変換 $f_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は, まず原点のまわりに反時計回りに θ ラジアン回転を行い, 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} c & b \\ b & 2a + c \end{pmatrix}$ による一次変換 $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を行い, さらに原点のまわりに時計回りに θ ラジアン回転を行う一次変換とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 B を求めよ.
- (2) 行列 B の行列式 $\det B$ を求めよ.
- (3) $a^2 + b^2 \neq 0$ とし,

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

とおく. 行列 B が対角行列となるような θ を α を用いて表せ.

- (4) $a^2 + b^2 \neq 0$ とし、行列 B が対角行列であるとする。このとき、 B を a, b, c を用いて表せ。

問題 8 [20 点]

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。
- (2) A の固有値 λ_1, λ_2 に属する固有ベクトルをそれぞれ求めよ。
- (3) 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすとする。このとき、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

問題 9 [20 点]

2 つの 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 α と β は実数とする。

- (1) 行列 A, B はともに直交行列であることを示せ。
- (2) 行列 A の固有値をすべて求めよ。
- (3) $0 < \alpha < \pi$ を満たすとする。このとき、次の 4 つのベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ のうち、行列 A の固有値に属する固有ベクトルをすべて選べ。(答えのみでよい。)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

- (4) 行列 BA の固有値をすべて求めよ。
- (5) 行列 BA の固有値に属する固有ベクトルを α と β を用いて表せ。

第 9 回の答え

問題 1

(I) (1) n と $n(n+1)$ はともに 3 の倍数ではない。(2) $n^2 + 3$ は 4 の倍数であり、かつ n は 8 以下である。(3) $\{1, 3, 5, 7\}$ (II) (1) 全射ではない。単射である。全単射ではない。(2) $f(A) = \{1, 16, 36\}$ であり、 $f(B) = \{1, 4, 16\}$, $f(C) = \{1, 9, 25\}$ である。(3) $f(A \setminus B) = \{36\}$ であり、 $f(B \cup C) = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ である。

問題 2

(1) B_2 のみが $A+B$ を定義することができ、 $A+B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ B_1, B_3, B_6 が AB を定義することができ、

$$AB_1 = \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -13 & 21 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}, AB_3 = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 5 \\ -17 & 7 & 11 \\ 17 & 4 & -18 \end{pmatrix}, AB_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(3) B_1 は正則であり、逆行列 B_1^{-1} は $B_1^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(II) 写像 f は線形写像である。実際に以下が成り立つことを確認すれば良い。

- 任意のベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ に対して、 $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$ が成り立つ。
- 任意の実数 c とベクトル $\vec{x}$ に対して、 $f(c\vec{x}) = cf(\vec{x})$ が成り立つ

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ による一次変換 f_A に対して $f = f_A$ が成り立つと述べても良い。

問題 3

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix}$ より、点 $(8, 21)$, (または ${}^t(8, 21)$) (3) $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, (4) $A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ より、点 $(-4, 3)$, (または ${}^t(-4, 3)$)
(5) $B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ であるので

$$\det B = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -1$$

問題 4

(1) A の固有方程式は

$$\det(tE_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t-3 & -1 \\ -1 & t-3 \end{pmatrix} = (t-4)(t-2) = 0$$

である。よって、 A の固有値は 4 と 2 である。

(2)

- A の固有値 4 に属する固有ベクトル $\vec{w} = {}^t(w_1, w_2)$ は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (4E_2 - A)\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 - w_2 \\ -w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$

を満たす。この方程式を満たす長さ 1 のベクトルとして、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選べる。

- A の固有値 2 に属する固有ベクトル $\vec{w} = {}^t(w_1, w_2)$ は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (2E_2 - A)\vec{w} = \begin{pmatrix} -w_1 - w_2 \\ -w_1 - w_2 \end{pmatrix}$$

を満たす。この方程式を満たす長さ 1 のベクトルとして、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選べる。

(3)

- 行列の対角化を利用する。(2) より、2 次正方行列 R を $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で定め、2 次対角行列

D を $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ で定めると、行列 A は ${}^tRAR = D$ を満たし対角化できる。特に、 tR は正則であり逆行列 R を持つことに注意すると、 $A = RDR^{-1}$ を満たす。すべての自然数 n に対して、 $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ であるので、

$$A^n = R D^n R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}$$

が成り立ち、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n \\ 4^n \end{pmatrix}$$

を得る。よって、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項はそれぞれ $a_n = 4^{n-1}, b_n = 4^{n-1}$ である。

- 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を推測した上で数学的帰納法を用いて示しても良い。
- 初期値が固有ベクトルであることを用いても良い。実際、 ${}^t(a_1, b_1) = {}^t(1, 1)$ は、 A の固有値 4 に属する固有ベクトルであり、 $A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ を満たすので、自然数 n に対して、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \left(4 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 4 A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 4^{n-1} A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 4^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n \\ 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題 5

- (1) • B' の座標を (b'_1, b'_2) とすると、 $OB' = OB \cos \theta$ より、

$$b'_1 = OB' \cos \theta = OB \cos^2 \theta = \cos^2 \theta, \quad b'_2 = OB' \sin \theta = OB \cos \theta \sin \theta = \cos \theta \sin \theta$$

を満たす。よって、 B' の座標は $(\cos^2 \theta, \cos \theta \sin \theta)$ である。

- C' の座標を (c'_1, c'_2) とすると、 $OC' = OC \sin \theta$ より、

$$c'_1 = OC' \cos \theta = OB \cos \theta \sin \theta = \cos \theta \sin \theta, \quad c'_2 = OC' \sin \theta = OC \sin^2 \theta = \sin^2 \theta$$

を満たす。よって、 C' の座標は $(\cos \theta \sin \theta, \sin^2 \theta)$ である。

- (2) (1) より、 $A = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$ である。

- (3) A の固有値は 0 と 1 である。固有値 0 に属する固有ベクトルとして ${}^t(-\sin \theta, \cos \theta)$ を選ぶことができ、固有値 1 に属する固有ベクトルとして、 ${}^t(\cos \theta, \sin \theta)$ を選ぶことができる。実際、 A の固有方程式 $\det(tE_2 - A) = 0$ は

$$\det(tE_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t - \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & t - \sin^2 \theta \end{pmatrix} = t(t - 1)$$

である。よって、 A の固有値は 0 と 1 である。

- A の固有値 0 の固有ベクトル $\vec{w} = {}^t(w_1, w_2)$ は、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \cos^2 \theta + w_2 \cos \theta \sin \theta \\ w_1 \cos \theta \sin \theta + w_2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

を満たす。この方程式を満たすベクトルとして、 ${}^t(-\sin \theta, \cos \theta)$ を選ぶことができる。

- A の固有値 1 の固有ベクトル $\vec{w} = {}^t(w_1, w_2)$ は、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - E_2)\vec{w} = \begin{pmatrix} -w_1 \sin^2 \theta + w_2 \cos \theta \sin \theta \\ w_1 \cos \theta \sin \theta - w_2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

を満たす。この方程式を満たすベクトルとして、 ${}^t(\cos \theta, \sin \theta)$ を選ぶことができる。

- (4) 例えば、 $\vec{v} = {}^t(-\sin \theta, \cos \theta)$ とおくと、 $\vec{v} \neq \vec{0}$ であり、

$$f(\vec{v}) = A\vec{v} = \vec{0}, \quad f(\vec{0}) = A\vec{0} = \vec{0}$$

を満たす。これは f が単射でないことを示す。