数学リテラシー1

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第4回（'25年4月25日)

演習問題

問題 1 [線型写像]

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ を $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ かつ $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とする。$f(\vec{e}_1)=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ かつ $f(\vec{e}_2)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ とする。この時、$f=f_A$ となる 2×2 行列 A を求めよ。

問題 2 [線型写像]

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ を $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ かつ $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とする。$f(\vec{e}_1+\vec{e}_2)=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ かつ $f(\vec{e}_2)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ とする。この時、$f=f_A$ となる 2×2 行列 A を求めよ。

問題 3 [線型写像]

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ を $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ かつ $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とする。$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ かつ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ とする。f を線型写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ とする。

(1) $f(\vec{a}), f(\vec{b})$ を $f(\vec{e}_1)$ と $f(\vec{e}_2)$ を用いて表せ。

(2) $f(\vec{e}_1)=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ かつ $f(\vec{e}_2)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ のとき、$f(\vec{a})$ と $f(\vec{b})$ を求めよ。

問題 4 [線型写像]

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ を $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ かつ $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とする。$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ かつ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ とする。f を線型写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ とする。

(1) $f(\vec{a})=\vec{e}_1, f(\vec{b})=\vec{e}_2$ であるとし、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を並べた 2×2 行列を $A=(\vec{a}\ \vec{b})$ とする。このとき、$f=f_B$ となる 2×2 行列を B としたとき、$A,\ B,\ E$ の間に成り立つ関係を求めよ。また、E は 2 次の正方行列である。

(2) B を求めよ。

問題 5 [非正則な 2×2 行列]

$ad-bc=0$ とする。$\tilde{A}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ のとき、$A\tilde{A}$ と $\tilde{A}A$ を計算せよ。

$\boxed{\text{問題 6}}$ [行列と 1 次変換 2]
n 次正方行列 A の逆行列 A^{-1} は存在すれば一意に定まることを示せ.

$\boxed{\text{問題 7}}$ [行列と 1 次変換 3]
以下の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{問題 8}}$ [逆行列]
次の行列は逆行列が存在するか？存在するなら逆行列を求めよ。
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{問題 9}}$ [逆写像と逆行列]
E_n を $n \times n$ の単位行列とする。逆行列の定義で、$AB = BA = E_n$ は、逆写像の定義 $f \circ g = \mathrm{id}_B$, $g \circ f = \mathrm{id}_A$ の性質に酷似しているが、この間にどのような関係があるか？
(Hint: 行列は写像と考えられるのだろうか？)

第 3 回の答え
問題 1 (1) 1 行 2 列目 (2) 2 行 1 列目 (3) 1 行 3 列目 (4) 2 行 2 列目

問題 2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とすると AE の第 (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} a_{il}\delta_{lj}$ である。ただし $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ とする。よって、これを計算して、$\displaystyle\sum_{l=1}^{n} a_{il}\delta_{lj} = a_{ij}$ となる。よって $AE = A$ である。

また、$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$ とすると、EB の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \delta_{il}b_{lj} = b_{ij}$ となる。よって $EB = B$ である。**問題** 写像 $f\colon A \to B$ と部分集合 $C_1, C_2 \subset A$ に対して,

$$f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$$

を示せ.

問題 3

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \end{aligned}$$

よって、$AB = BA = E_2$ となることがわかる。

問題 4 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ かつ $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とする。この時、

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \\ &= (ae+bg)(cf+dh)-(ce+dg)(af+bh) \\ &= acef+adeh+bcgf+bcgh-(acef+bceh+adgf+bdgh) \\ &= ad(eh-gf)+bc(gf-eh) = (ad-bc)(eh-gf) = \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

となる。

問題 5 教科書の問 3.1.1 と同じなので省略。

問題 6 教科書の問 3.1.2 と同じなので省略。

問題 7 連立方程式をベクトルを用いて表すと $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ であり、左辺を行列を用いて表すと $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるので、結果的に $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ となる。。