

数学リテラシー 1

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第5回 ('25年5月2日)

演習問題

問題 1 [線形写像による原点の値]

$\vec{0}_n$ として $\mathbb{R}^n$ の零ベクトルを表すとする. 任意の線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は

$$f(\vec{0}_n) = \vec{0}_m$$

を満たすことを示せ.

問題 2 [拡大・縮小]

次の一次変換を表す 2×2 行列 A を求めよ.

- (1) x 軸方向に 2 倍拡大し, y 軸方向に -3 倍拡大する変換.
- (2) x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍拡大し, y 軸方向に -1 倍拡大する変換.

問題 3 [回転を表す行列]

次の平面上の一次変換を表す 2×2 行列 A を求めよ.

- (1) 原点を中心とした 30° の回転.
- (2) 原点を中心とした -45° の回転

問題 4 [回転の合成]

$f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を線形変換とする.

- (1) f, g が回転変換であるとき, $f \circ g$ は回転変換であることを示せ.
- (2) f が回転変換かつ g が鏡映変換であるとき, $f \circ g$ は鏡映変換であることを示せ.
- (3) f, g が鏡映変換であるとき, $f \circ g$ は鏡映変換であることを示せ.

問題 5 [回転の合成]

平面上において, 原点を中心とした θ 回転を表す回転行列を R_θ とするとき,

$$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

を満たすことを示せ.

問題 6 [拡大縮小かつ回転]

平面上の、 x, y 軸方向の拡大縮小変換かつ回転変換は、恒等変換もしくは原点を中心とした点対称変換であることを示せ。

問題 7 [一次変換によって移動する点]

次の変換によって、以下の点 P はどの点に移るか？

- (1) 原点を中心に 60° 回転における点 $P(1, 2)$.
- (2) 原点を中心に 120° 回転における点 $P(3, 5)$.

問題 8 [x, y 軸に沿っていない拡大を表す行列]

$y = x$ 方向に 2 倍、 $y = -x$ 方向に 3 倍拡大する一次変換を表す行列はどのように作ればよいだろうか？

問題 9 [原点を中心としない回転]

平面上の $(1, 1)$ を中心とした θ 回転は線形写像であるか？もしそうでないなら、なぜそうか？

問題 10 [回転行列と複素数]

複素数 $z = x + iy$ に $\cos \theta + i \sin \theta$ を掛けると、複素平面で 0 を中心として、 z を θ 回転したものになる。これを利用して、 θ 回転の回転行列が $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ であることを示せ。

問題 11 [鏡映変換]

次の直線を対称軸とした鏡映変換を表す行列を求めよ。

- (1) $y = 0$
- (2) $y = \sqrt{3}x$
- (3) $y = x$

問題 12 [直線を軸とした鏡映変換]

$y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ を対称軸とした鏡映変換において、以下の点は平面上のどこに移るか？

- (1) $(1, 2)$
- (2) $(-3, 1)$

問題 13 [線形写像の逆写像の線形性]

線形写像の逆写像も線形写像であることを示せ。

第 4 回の答え

問題 1 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

問題 3 (1) $f(\vec{a}) = 2f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{b}) = -3f(\vec{e}_1)$

(2) $f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

問題 4 (1) $AB = E$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

問題 5

$$\begin{aligned} A\tilde{A} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}A &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \end{aligned}$$

問題 6 教科書の問 3.1.3 と同じなので省略。

問題 7 $\det A = 1 \neq 0$ であるから逆行列が存在する。教科書の式 (3.1.1) から $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ がわかる。同様に $\det B = 2 \neq 0$ であるから逆行列が存在する。教科書の式 (3.1.1) から $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 。

問題 8 (1) 存在しない。 (2) $-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $ac-b^2 \neq 0$ の場合: $\frac{1}{ac-b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $ac-b^2 = 0$ の場合: 存在しない。 (4) $-\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

問題 9 $AB = BA = E_n$ は $f_A \circ f_B = f_{AB}$ であり、 $f_{E_n} = id_{\mathbb{R}^n}$ であるから、この 2 つの式を写像の言葉で言い換えれば、 $f_A \circ f_B = id_{\mathbb{R}^n}$ かつ $f_B \circ f_A = id_{\mathbb{R}^n}$ となる。よって、このとき、 f_A には逆写像が存在することを意味する。つまり f_B が f_A の逆写像 f_A^{-1} である。