数学リテラシー1

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第6回（'25年5月7日)

演習問題

問題 1 [一次独立]
次のベクトルは一次独立か一次従属か定義に従って決定せよ．

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

問題 2 [行列式]
次の行列の行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -4\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}3 & 2\\-4 & -6\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

問題 3 [対称移動と一次変換]
次の各問いに答えよ．

(1) x 軸について対称移動する一次変換を表す行列 P_x を求めよ．

(2) x 軸について対称移動と原点を中心に θ 回転との合成を利用して，直線 $y=(\tan\theta)x$ についての対称移動を表す行列 A を求めよ．

問題 4 [直線への正射影の表す一次変換]
直線 $y=ax$ (a は定数) が与えられているとする．点 (p,q) からこの直線に下した垂線の足の座標を求めよ．またこれを用いて，この直線への正射影 (垂線の足へ写像する一次変換) を表す行列を求めよ．

問題 5 [2次の直交行列]
2次の直交行列は回転と鏡映しかないことを確かめよ．

問題 6 [平行と一次従属であることの同値性]
2つのベクトルが一次従属であることと，平行であることは同値であることを示せ．ただし2つのベクトルが平行であるとは，片方がもう片方の実数倍になっていることである．

問題 7 [$\det A=0$ なら全射ではないこと]

2 次正方行列 A が $\det A = 0$ ならば，$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は全射ではないことを示せ．

$\boxed{\text{問題 8}}$ [$\det A = 0$ なら単射ではないこと]
2 次正方行列 A が $\det A = 0$ ならば，$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は単射ではないことを示せ．

$\boxed{\text{問題 9}}$ [行列式の幾何的意味]
A を 2×2 行列とする．このとき，原点 O, および $(1,0)$ $(0,1)$, $(1,1)$ を頂点とする $\mathbb{R}^2$ の単位正方形は，f_A によって面積が $|\det A|$ の平行四辺形に移されることを示せ．
$(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)$ を頂点とする正方形ではどうか？

$\boxed{\text{問題 10}}$ [線形写像]
点 $(1,1)$ を $(1,2)$ に写す線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ で、面積を 3 倍する写像はどのような写像であるだろうか？$f = f_A$ となる 2×2 行列 A をひとつ求めよ。

第 5 回の答え
問題 1　$f(\vec{0}_n) = f(\vec{0}_n + \vec{0}_n) = f(\vec{0}_n) + f(\vec{0}_n)$ より、$f(\vec{0}_n) = \vec{0}_m$ となる。

問題 2　(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

問題 3　(1) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

問題 4　(1) 問題 5 の計算から $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$ が成り立つから回転変換の合成も回転変換となる。
(2) 直線 $y = \left(\tan \frac{\theta}{2}\right) x$ に関する鏡映変換を表す行列を A_θ とする。具体的には $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ である。

$$R_{\theta_1} A_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & -\cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = A_{\theta_1+\theta_2}$$

ゆえに、回転変換と鏡映変換の合成は鏡映変換になる。
(3) 上と同様に、直線 $y = \left(\tan \frac{\theta}{2}\right) x$ に関する鏡映変換を表す行列を A_θ とする。

$$A_{\theta_1} A_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2) & -\sin(\theta_1-\theta_2) \\ \sin(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix} = R_{\theta_1-\theta_2}$$

ゆえに、鏡映変換の合成は回転変換となる。

問題 5 $R_{\theta_1}R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = R_{\theta_1+\theta_2}$

問題 6 x, y 軸方向拡大縮小変換を表す変換を表す行列は $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ であり、A が回転行列を表すには、第 1 列目と第 2 列目のベクトルの長さが 1 でなければならないから、$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$ を満たす必要がある。また、A が回転行列であることから $\det A = 1$ である必要もある。ゆえに、$\lambda_1\lambda_2 = 1$ であるこれを解いて、$(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1), (-1, -1)$ のみとなる。よって、$A = E, -E$ となる。これは恒等変換であるか、180 度回転の回転行列であるかどちらかである。後者は原点中心の点対称移動であるとも言い換えられる。

問題 7 (1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3+5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}-5}{2} \end{pmatrix}$

問題 8 $R_{45} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} R_{-45}$ を考えればよい。

問題 9 一般に原点が原点に移らないので線形写像ではない。

問題 10 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると、$\alpha z = (\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy) = x\cos\theta - y\sin\theta + i(y\cos\theta + x\sin\theta)$ となる。よって、$\begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ y\cos\theta + x\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる。よって回転行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となる。

問題 11 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos(120^\circ) & \sin(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) & -\cos(120^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 12 $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ に関する対称変換を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & \sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & -\cos(-60^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ である。

(1) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$

(2) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$

問題 13 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が線形写像とする。逆写像 f^{-1} が存在することと f が全単射であることは同値である。このとき、$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ である。$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ かつ $\lambda \in \mathbb{R}$ を任意に取るとき、

$$f^{-1}(\vec{x}+\vec{y}) = f^{-1}(f(f^{-1}(\vec{x})) + f(f^{-1}(\vec{y}))) = f^{-1}(f(f^{-1}(\vec{x}) + f^{-1}(\vec{y}))) = f^{-1}(\vec{x}) + f^{-1}(\vec{y})$$
$$f^{-1}(\lambda\vec{x}) = f^{-1}(\lambda f(f^{-1}(\vec{x}))) = f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(\vec{x}))) = \lambda f^{-1}(\vec{x})$$

となる。よって f^{-1} も線形写像である。