

数学リテラシー 1

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第7回 ('25年5月9日)

演習問題

問題 1 [直交するベクトルの一次独立性]

$\vec{0}$ ではない 2 つのベクトル $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ が $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ なら $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ は一次独立であることを示せ。

問題 2 [行列の固有値と固有ベクトル 1]

以下の行列の固有値を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

また、この行列の固有ベクトルを求めよ。

問題 3 [行列の固有値と固有ベクトル 2]

以下の行列の固有値を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

また、この行列の固有ベクトルを求めよ。

問題 4 [行列の対角化 1]

以下の行列を対角化せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 5 [行列の対角化 2]

次の 2 次の対称行列を直交行列を用いて対角化せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 6 [1 つの固有値を持つ対称行列]

$A \in M(2, \mathbb{R})$ が対称行列かつ固有値が 1 つである場合、 A はスカラー行列であることを示せ。スカラー行列とは、 αE の形の行列のことである。

問題 7 [行列の対角化 3]

n を自然数とする. 問題 3 を利用して $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ の A^n を求めよ.

問題 8 [行列の対角化 4]

n を自然数とする. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ の A^n を求めよ.

問題 9 [行列の対角化 5]

2 次の正方行列 A と可逆行列 P に対して $P^{-1}AP$ と A の固有値が等しいことを示せ.

問題 10 [行列の対角化 6]

次の連立漸化式の一般項を求めよ.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n + 10y_n, & x_1 = 3 \\ y_{n+1} = -3x_n - 7y_n, & y_1 = 1. \end{cases}$$

問題 11 [行列の対角化 7]

次の連立漸化式の一般項を求めよ.

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 3y_n, & x_1 = 1 \\ y_{n+1} = 4x_n - 2y_n, & y_1 = 1. \end{cases}$$

第 6 回の答え

問題 1 (1)

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす c_1, c_2 を決定すればよい. 連立方程式

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

を解くと $c_1 = c_2 = 0$ となるので, 一次独立.

(2)

$$c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす c_1, c_2 を決定すればよい. 連立方程式

$$\begin{cases} -c_1 + 2c_2 = 0 \\ 2c_1 - 4c_2 = 0 \end{cases}$$

の解は $c_1 = 2c_2$ を満たす任意の実数である. 例えば $(c_1, c_2) = (2, 1)$ を取れるので, 一次従属.

以下同様の手法なので, 答えだけを記す:

(3) 一次独立 (4) 一次従属 (5) 一次従属 (6) 一次従属 (7) 一次独立

問題 2 (1)-1 (2)0 (3)-10 (4)0 (5)0 (6)0 (7)-2

問題 3 教科書の問 3.2.2 と同じなので省略。

問題 4 教科書の問 3.2.3 と同じなので省略。

問題 5 R を 2 次の直交行列とし、 $R = (\vec{v}_1 \vec{v}_2)$ とする。 $|\vec{v}_1| = 1$ であるから $\vec{v}_1 = {}^t(\cos \theta, \sin \theta)$ となる θ が存在する。 $\vec{v}_2$ は $\vec{v}_1$ と直交するベクトルで、長さが 1 なので、 $\vec{v}_2 = {}^t(-\sin \theta, \cos \theta)$ もしくは $\vec{v}_2 = {}^t(\sin \theta, -\cos \theta)$ のどちらかである。よって、 $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ もしくは $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ であり、前者は回転行列であり、後者は鏡映を表す行列である。

問題 6 2 つのベクトル $\vec{v}$ と $\vec{w}$ が一次従属であるとする。この時、ある $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ となる実数の組が存在して、 $c_1 \vec{v} + c_2 \vec{w} = \vec{0}$ が成り立つ。 $c_1 \neq 0$ であれば、 $\vec{v} = -\frac{c_2}{c_1} \vec{w}$ が成り立ち、 $c_2 \neq 0$ なら、 $\vec{w} = -\frac{c_1}{c_2} \vec{v}$ が成り立ち、 $\vec{v}$ と $\vec{w}$ は平行となる。逆に $\vec{v}$ と $\vec{w}$ が平行であるとする。 $\vec{v} = k \vec{w}$ とすると、 $\vec{v} - k \vec{w} = \vec{0}$ が成り立ち、 $(c_1, c_2) = (1, -k) \neq \vec{0}$ とすることで、 $c_1 \vec{v} + c_2 \vec{w} = \vec{0}$ が成り立つ。 $\vec{w} = k \vec{v}$ の場合も同様である。よって $\vec{v}$ と $\vec{w}$ は一次従属。

問題 7 $A = (\vec{v}_1 \vec{v}_2)$ とする。 $\det A = 0$ の時、 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は平行になるから、これらを適当に入れ替えることで、 $\vec{v}_1 = k \vec{v}_2$ として良い。 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2 = (xk + y) \vec{v}_1$ である。ここで $\vec{v}_1$ と直交する $\vec{0}$ ではないベクトル $\vec{w}$ が存在する。なぜなら $\vec{v}_1 = \vec{0}$ なら $\vec{w}$ としてどんなものでも良い。 $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ なら $R_{90} \vec{v}_1$ 直交するベクトルを取れる。 $\vec{w}$ は f_A の像にはならない。

問題 8 問題 7 の解答と同様の $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を取ると、 ${}^t(x, y)$ と ${}^t(x-1, y+k)$ は $f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (xk + y) \vec{v}_1 = ((x-1)k + y + k) \vec{v}_1 = f_A \begin{pmatrix} x-1 \\ x+k \end{pmatrix}$ となり同じベクトルに移る。よって f_A は単射ではない。

問題 9 前半は教科書の命題 3.2.2 をみよ。後半部分の正方形を S とし、 S の第 i 象限の部分 S_i とする。 A が $\det(A) = 0$ の時、 f_A によって S_i は全てある線分に移されて面積は 0 である。よって f_A で写した面積も 0 となる。 A が $\det(A) \neq 0$ のとき、 f_A が全単射であるから、 S_1, S_2, S_3, S_4 の内部はお互いに重ならない。よって、 $f_A(S)$ の面積は $f_A(S_i)$ の面積の総和になる。 $f(S_1)$ の面積は $|\det(A)|$ であり、 S_2 は $-\vec{e}_1, \vec{e}_2$ で作られる正方形であるが、この行き先は $-f_A(\vec{e}_1)$ と $f_A(\vec{e}_2)$ で作られる平行四辺形であり、これは $f_A(\vec{e}_1)$ と $f_A(\vec{e}_2)$ で作られる平行四辺形と同じ面積を持つ。よって $f_A(S_2)$ の面積は $|\det A|$ となる。同様に $f_A(S_3)$ と $f_A(S_4)$ も面積は $|\det A|$ であるから、 $f_A(S)$ の面積は $4|\det A|$ となる。

問題 10 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$ より、 $a+b=1, c+d=1$ となる。また条件から $|ad-bc|=3$ となる。これを満たす a, b, c, d として、 $(a, b, c, d) = (0, 1, -3, 4)$ とすることで、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ が得られる。